SORULAR

1) Denk. (61)'de verilen gerigötürme (recurrence) bağıntısını çıkarın.

2) Poisson dağılımı için aşağıda verilen gerigötürme bağıntısını çıkarınız.

$$P_a(n+1) = \frac{a}{n+1} P_a(n)$$

3) Çok sayıda yumurtadan % 1'i çürük çıkıyor. Bunlardan seçilmiş gelişigüzel bir düzine yumurtadan **hiçbirinin** çürük çıkmama, birinin ve birden fazlasının çürük çıkma olasılığı nedir?

4) Bir pazar günü öğleden sonra gezinti için dışarıya çıkan bir adam aşağıdaki oyunu oynuyor. Hareket noktasını da içine alan her köşe başında yazı-tura atıyor. Yazı gelirse kuzeye, tura gelirse güneye bir öteki köşeye kadar yürüyor. N atıştan sonra başlangıç noktasına olan uzaklıkların olasılık dağılımını bulunuz. Adam bu oyunu bir kaç pazar oynadığına göre N atıştan sonra başlangıca olan ortalama uzaklığı hesaplayın. Bu ortalama değer N ile nasıl değişir?

5) Doğan bebek sayısının Poisson dağılımına uyduğunu ve ikiz doğma olasılığının $\frac{1}{100}$ olduğunu kabul edelim. Beşiz doğma olasılığını bulunuz.

Deney **Mİ - 6**

Normal Dağılım

GİRİŞ

Normal veya Gauss dağılımı binom dağılımının N büyürken p'nin sonlu kaldığı limit halidir (N büyürken p'nin küçülüp Np çarpımının sonlu kaldığı Poisson dağılımından bu şekilde ayrı düşmektedir.) Normal dağılım çeşitli nedenlerle önem kazanır. Büyük sayılar söz konusu olup binom dağılımı kullanışsız hale geldiğinde bu yaklaşıklık binom dağılımı için uygun gelmektedir. Daha önemli başka bir konu, fiziksel ölçmelerde yapılan hataların normal dağılıma uyduğunun deneysel olarak sık sık görülmesidir; bu nedenle deneysel hataların incelenmesinde büyük bir önem taşımaktadır.

Binom dağılımından giderek normal dağılımı türetmek için N büyük olduğundan n'nin anlamlı değerlerinin de çok büyük olduğunu böylece bir n'den ötekine geçerken P'nin çok az değiştiğini kabul edeceğiz. Buna göre n bir tam sayı olmaktan çok, sürekli bir değişken gibi düşünülebilir. Üstelik, binom dağılımının N büyüdükçe keskinleşen bir maksimum vermesi özelliğinden de yararlanacağız. Binom dağılımında böyle bir keskinleşmenin var olduğu dağılımın genişliğini veren σ'nın $\sqrt{N}$ ile, $\bar{n}$'nin ise N ile oranlı bir biçimde artmasından anlaşılmaktadır. Bu nedenle n'nin sadece $\bar{n}$'ye yakın sayılabilecek değerleri için büyük olasılık değerleri çıkacaktır.

Deney 5'de verilen Denk. (61) gerigötürme bağıntısı ile işe başlayalım. P'yi n'nin sürekli bir fonksiyonu kabul edersek $\Delta n = 1$ olmak üzere bu fonksiyonun türevini yaklaşık olarak $P(n+1) - P(n)$ alabiliriz. Başka deyimle,

$$P'(n) = P(n+1) - P(n) = \left[\frac{p(N-n)}{q(n+1)} - 1\right] P(n) \qquad (62)$$

olacaktır. n'nin sadece büyük değerleri söz konusu olduğundan paydadaki $n+1$ yerine n alabiliriz. Sonra $p + q = 1$ olgusuna dayanarak eşitliği yeniden düzenlersek

$$\frac{P'(n)}{P(n)} = \frac{Np - n}{qn} \qquad (63)$$

...e ederiz. Burada n'nin $\bar{n} = Np$ yöresindeki değerlerinin önemli oluşu... düşünerek paydadaki n yerine ortalama Np değerini koyalım. Pay N... p ile n'nin farkına eşit olduğu için n'deki ufak değişimlere karşı pay...dan daha duyarlıdır ve aynı değişikliğin paydada yapılması akıllıca bir ...klaşıklık olmayacaktır, dikkatinizi çekeriz.

Böylece,

$$\frac{P'(n)}{P(n)} = \frac{Np - n}{Npq} \qquad (64)$$

...ya $\bar{n} = Np$ ortalaması ve $\sigma^2 = Npq$ variansı [Denk. (53) ve (54)] cin...den

$$\frac{P'(n)}{P(n)} = \frac{\bar{n} - n}{\sigma^2} \qquad (65)$$

...desini buluruz. Şimdi integral sabitini lnC alarak her iki tarafın in...gralini alabiliirz: Böylece,

$$\ln P(n) = \ln C - \frac{(n-\bar{n})^2}{2\sigma^2} \qquad (66)$$

...ya iki tarafın antilogaritmasını alarak

$$P(n) = Ce^{-(n-\bar{n})^2/2\sigma^2} \qquad (67)$$

...de ederiz. C sabitinin değeri, olabilir tüm n değerlerinin olasılıkları ...plamının bire eşit olması koşulundan giderek bulunabilir. Burada n ...zerinden toplama değil integral alacağımız için C

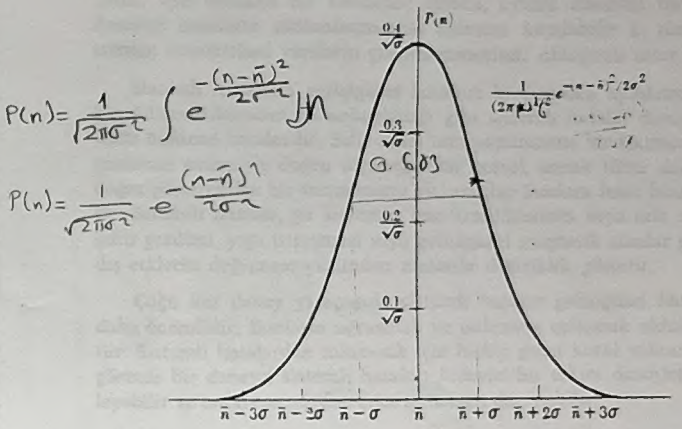
$$\int P(n)dn = 1 \qquad (68)$$

...ığıntısını sağlamalıdır. İntegralin hesaplanması biraz uğraştıracağı için ...nin $1/(2\pi\sigma^2)^{1/2}$ olacağını söylemekle yetineceğiz. Sonuç olarak normal ...ağılım fonksiyonu

$$P(n) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}(Npq)^{1/2}} e^{-(n-Np)^2/2Npq} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} e^{-(n-\bar{n})^2/2\sigma^2} \qquad (69)$$

...lacaktır. Bu yazılışlardan genellikle ikincisi kullanılır, fakat burada her ...isini yazmakdaki amacımız içinde aynı ortalama ve ayni variansın (da...lmanın) bulunduğu binom dağılımına olan ilişkiyi göstermekdir.

ŞEKİL 7



Şek. 7. Denk. (69)'un çizimidir, $\bar{n}$ ve σ değerlerinin önemini göstermektedir. Eğri $n = \bar{n}$ çevresinde simetriktir ve σ hep dağılımın "genişliğini" verir. Eğri $n = \bar{n} \pm \sigma$ değerlerinde n = n̄'deki büyük değerinin $e^{-1/2}$'sine düşer. n'nin bu sınırlar arasındaki herhangi bir değeri alma olasılığının 0,683 olduğu gösterilebilir.

Bu değer bir takım sayısal yaklaşıklıklarla, Denk. (69)'un $n = \bar{n} - \sigma$ dan $n = \bar{n} + \sigma$'ya kadar integralinin alınmasıyla elde edilir. Benzerince, n'nin $\bar{n} - 2\sigma$ ile $n = \bar{n} + 2\sigma$ arasına düşme olasılığı 0,954 ve $\bar{n} \pm 3\sigma$ arasına düşme olasılığı da 0,997 bulunmaktadır. Başka deyimle, n'nin n̄'dan $\pm 3\sigma$ değerinden daha fazla sapma olasılığı 0,003 olacaktır.

DENEY

Gelişigüzel - sayılar çizelgemizin gerçekten gelişigüzel olup olmadığını anlamak için bazı yoklamalar uygulayabiliriz. Örneğin, Deney 4'de elde ettiğimiz sayı frekanslarını gözönüne alalım. 360 sayı içerisinde 0 ile 9 arasındaki her rakamdan ortalama 36 tane çıkmasını bekleriz. Şimdi, 39 tane yedi bulduğumuzu kabul edelim; bu acaba sayıların gelişigü-

...el olmadığını mı ifade etmektedir, yoksa bu sayı akla yakın bir olasılık bölgesinde mi kalmaktadır?

Bu soruyu cevaplandırmak için önce 360-rakamlı gelişigüzel sayılar çizelgesinde n tane 7 bulunma olasılığının binom dağılımı ile N = 360, $p = \frac{1}{10}$ olmak üzere verildiğini hatırlıyalım. Bu dağılımın ortalaması verildiğü gibi $\bar{n} = Np = 360 \times \frac{1}{10} = 36$'dır. Standart ayrılma ise

$$\sigma = (Npq)^{1/2} = (360 \times \frac{9}{100})^{1/2} = 5{,}7 \simeq 6$$

...maktadır.

Dikkat edilirse binon dağılımının normal dağılım yaklaşıklığında ...rhangi bir frekansın ortalamadan bir standart sapma (yani 30 ile 42) ...lgesine düşmesi için % 68 ve iki standart sapma bölgesine (yani 24 ile ... arasına) düşmesi için de %95 gibi bir olasılık vardır. Frekansın tam ...% bulunması olasılığının çok daha küçük olduğuna dikkatinizi çekeriz. ...u olasılığı hesaplayın.

Yukarki ölçütü kullanarak Deney 4'deki sayı frekanslarının gelişi...üzel olup olmadığını sınayınız.

Bu ilkenin biraz değişik bir şekli de başka bir uygulama yeri, ...elişigüzel rakamların çoğunlukla çift mi, yoksa tek mi olduğunu ...ormaktır. 360 sayılı çizelgedeki çift rakamların olasılık dağılımı N'nin ...60, p'nin $\frac{1}{2}$ olduğu (çünkü bir tek sayının çift veya tek gelmesi aynı de...ecede olasıdır) binom dağılımıdır. Bu değerlere karşılık gelen n ve σ'yi ...ulun ve bundan % 95 ve 65 olasılıklı kesimlerinin sınırlarını hesaplayın. ...izelgenizdeki çift rakamları sayın. Bunun gelişigüzel olmadığını göste...en bir belirti var mı?

Bu metodun başka bir uygulama yeri bir paranın yazı veya tura gel...e olasılığının gerçekten eşit olup olmadığının belirtilmesidir. Bir para...100 kez atıp 52 yazı ve 48 tura çıkardığımızı kabul edelim. Acaba bu ...ara bir tarafa eğilimli midir? Binom dağılımı için normal yaklaşıklığı ...ullanarak n'nin (ortalaması 50) yine çeşitli olasılıklara karşılık gelen ...eğişim bölgelerini hesaplayabiliriz. n'nin ölçülen değeri % 95 olasılıklı ...ölgenin dışında kalıyorsa birşeyin hatalı olduğundan kuşkulanabiliriz. ...eçeceğiniz bir parayı 100 kez atıp bulacağınız sonuçları yorumlayın.

...LÇMEDE GELİŞİGÜZEL HATALARININ ÇÖZÜMLENMESİ

Normal dağılım fonksiyonunun en önemli uygulama yerlerinden bi-

ri ölçmelerdeki gelişigüzel hataların çözümlenmesidir. Bu, yeni başlayanlar için tehlikeli bir konudur; çünkü, uyanık olmayan bir öğrenci deneysel hataların çözümlenmesine öylesine kapılabilir ki tüm başarı sırrının istatistiksel verilerin çözümlenmesinde olduğunu sanır.

Sistemli hatalarla **gelişigüzel** hataları birbirinden ayırdetmek gerekir. Adlandırılışından da anlaşılacağı gibi sistemli hatalar deneyin yapısında bulunan hatalardır. Sıfır ayarı tam yapılmamış bir voltmetre, ısısal genleşme nedeniyle doğru ölçmeyen bir cetvel, ancak tümü daldırılırsa doğru gösterebilen bir termometre vb. araçlar bunlara basit birer örnektir. Sistemli hatalar, ya sistemin bazı özelliklerinin veya oda sıcaklığı, şehir gerilimi, yapı titreşmesi veya gelişigüzel magnetik alanlar gibi bazı dış etklerin değişmesi yüzünden zamanla değişiklik gösterir.

Çoğu kez deney yapımında sistemli hatalar gelişigüzel hatalardan daha önemlidir. Bunlarla uğraşmak ve önlemeye çalışmak oldukça güçtür. Sistemli hatalardan sakınmak için hiçbir genel kural yoktur; ancak görmüş bir deneyci sistemli hataları önleyici bir takım deneyler düzenleyebilir ve onları su yüzüne çıkarıp hemen düzeltebilir.

Gelişigüzel hatalar deneyin yapılışında önceden kestirilemeyen ve bilinmeyen pek çok değişimlerden ileri gelmektdir. Bunlar en küçük bir bölme aralığının onda birini kestirmede olduğu gibi, deneyciden gelebilen küçük hatalardır. Deney koşullarında önceden beklenemyen gelişigüzel dalgalanmalar da bu hataların kapsamı içindedir. Bu gibi gelişigüzel hataların normal dağılım fonksiyonuna uygun biçimde dağıldığı deneysel olarak görülmüştür ve gelişigüzel hataların etkisini azaltmak için bu özellikten yararlanılabilir. Burada yararlı bir kaç sonuca değineceğiz.

Belli bir fiziksel niceliği bir çok kez ölçtüğümüzü ve gerçek değerden sapan bir takım sayılar bulduğumuzu kabul edelim. Sapmalar sadece gelişigüzel hatalardan ileri geliyor ve bu hataların dağılımı normal dağılım fonksiyonuna göre oluyorsa verilerden elde edilebilecek en yaklaşık değerin aritmetik ortalama (veya ortalama) olduğu gösterilebilir. Bu da yeterince akla yakın bir sonuçtur.

Acaba bu ortalamaya ne kadar inanabiliriz? Her gözlemin standart sapması hesaplanabilir. Bu standart sapma her gözlemin yeniden elde edilebilirliğinin ölçüsünü gösterir. Ortalamanın ayrı ayrı ölçmelerden daha inanılır olmasını bekliyoruz. Gerçekten her birinde N gözlem bulunan bir çok ölçme grupları (veya ölçme tümceleri) almış olalım. Her grubun ortalama değer ve standart sapmasını hesapladıktan sonra, orta-

lamaların da standart sapmasını bulacak olursak bunun her grubunun standart sapmasından yaklaşıkça $\sqrt{N}$ kadar küçük olduğunu gösterebiliriz. Yani,

$$\sigma_{ort} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

dır ve ortalamanın standart sapmasına ortalama değerin doğruluğunu gösteren bir belirtici gözüyle bakılabilir.

Bununla birlikte bulduğumuz sonuç ancak hataların tümünün gelişigüzel olduğundan ve söz konusu gelişigüzel hatalara göre daha büyük katkısı olabilecek hiç bir sistemli hatanın bulunmadığına güvendiğimiz zaman geçerli olacaktır.

Bir takım a, b, c, ... niceliklerini ölçerek, genel biçimde

$$Q = f(a, b, c, \ldots)$$

gibi bilinen bir bağıntı yardımıyla bir Q niceliğini hesaplamak istediğimizi kabul edelim. Ayrıca a, b, ... niceliklerinin herbiri $\sigma_a, \sigma_b, \ldots$ gibi standart sapmalar göstersinler. Acaba Q değerinin standart sapması ne olacaktır?

Q'nun standart sapmasının

$$\sigma_Q^2 = \left(\frac{\partial Q}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \ldots$$

ifadesi ile hesaplandığını gösterebiliriz(*). Bu bağıntı, değişken niceliklerdeki hatanın bu niceliklerden giderek hesaplanan sayılara olan etkisini çözümleyen temel hata dağılımı bağıntısıdır.

SORULAR

1. Normal dağılımı binom dağılımının bir yaklaşıklığı olarak ele aldığımıza göre, bu yaklaşıklar n'nin $\bar{n}$'ye yakın değerleri için mi, yoksa $\bar{n}$'den uzak ve dağılımın uçlarına yakın değerleri için mi daha doğru olacaktır Açıklayınız.
2. Bir dağılımdaki "olabilir hata" öyle bir hata olarak tanımlanırki mutlak değeri bundan küçük olan bir hata değeri ½ olasılıkla ortaya çıksın. Bir olasılık integrali çizelgesi kullanarak, normal dağılım için muhtemel hatayı bulun ve σ'nın bir katı cinsinden ifade edin. "En" muhtemel hata bu mudur? Değilse, nedir?
3. Normal dağılımın $\langle (n - \bar{n})^2 \rangle_{ort}$ variansını σ cinsinden hesaplayınız.
4. Normal dağılımın merkezinin her dönüm noktasına olan uzaklığını σ cinsinden bulun.

(*) H.D. Young "Statistical Treatment of Experimental Data" Mc Graw-Hill Book Company New York, 1962.

5 Manyetizma.

15.06.1992

FIZ-341 LABAROTUVARI FİNAL SINAVI SORULARI

1. Normal bir zar 180 kez atılarak aşağıdaki frekanslar elde edilmiştir.

Sayı	1	2	3	4	5	6
Frekans	28	33	34	27	25	32

% 25 olasılıklı bölgenin sınırlarını bularak, yukarıdaki sayılardan hangilerinin bu bölgeye düştüğünü bulunuz.

2. *N* tane özdeş cam bilya ile yapılan deney sonucunda elde edilen veriler aşağıda tablolanmıştır. Bu verilerin Maxwell hız dağılımına uyduğunu, konuma bağlı dağılım fonksiyonunu kullanarak grafiksel olarak gösteriniz.

(Maxwell-Boltzman hız dağılım fonksiyonu:)

$$P(v)dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} v^2 dv$$

Bölme No	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Bilya Sayısı	27	54	126	120	80	69	49	34	44	20

3. Aşağıdaki tabloda 10 yüzlü, 3 adet, özdeş gibi görünen zarın, 200 atış sonunda çıkış frekansları verilmiştir. Bu verilerden yararlanıp, χ^2 testini kullanarak, zarların güvenilir olup olmadığını yorumlayınız.

Zarın Yüzü	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Kırmızı	22	18	18	21	24	20	25	16	17	17
Mavi	17	16	23	26	15	23	14	24	19	23
Yeşil	21	18	20	22	19	24	16	20	23	17

4. Yüzeylerinde birden altıya kadar rakamlar bulunan, 6 yüzlü iki zar 36 defa atılıyor. Her bir atışta zarların üste gelen yüzlerindeki rakamlar toplanıyor. Bu durumda her bir toplamın çıkabileceği çeşitli kombinasyonları ve bu toplamlara karşılık gelen olasılıkları tablo halinde oluşturunuz.

5. a) Poisson dağılımı bağıntısını türetiniz. Bu dağılım için ortalama ve standart sapmayı tanımlayınız.

b) 220 yanlış basılmış sözcüğün 200 sayfalık bir kitapta rasgele dağıldığını varsayınız. Bir sayfanın,

i) hiç yanlış sözcük içermeme,

ii) bir yanlış sözcük içerme,

iii) iki ya da daha fazla yanlış sözcük içerme olasılığını bulun.

6. a) Aşağıda verilen 14 keyfi sayıyı,

$R(I+14) = R(I) + R(I+7)$

eğer $R(I+14) > 1$ ise $R(I+14) = R(I+14) - 1$

ifadelerini kullanarak 20 keyfi sayıya tamamlayınız.

b) Elde ettiğiniz 20 keyfi sayıyı kullanarak,

$F(x) = 2 * x$

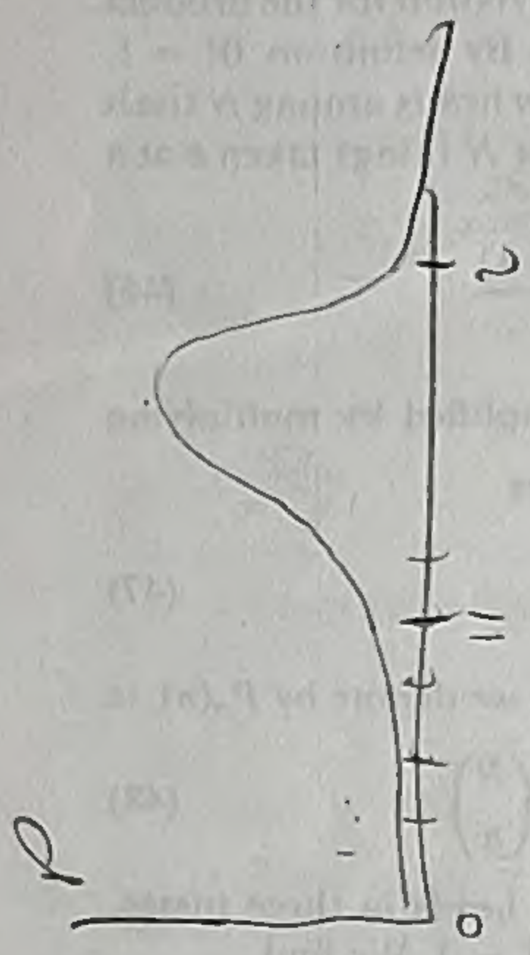
fonksiyonunun integralini, sıfır ile bir arasında ($\int_0^1 f(x)dx$) hesaplayınız, bulduğunuz değeri analitik integral değeri ile karşılaştırınız.

c) Central limit kuramına göre yaptığınız hata ne mertebededir?

R(1) = 0.8323	R(8) = 0.9525
R(2) = 0.1962	R(9) = 0.4127
R(3) = 0.2746	R(10) = 0.0549
R(4) = 0.3871	R(11) = 0.2755
R(5) = 0.0069	R(12) = 0.6248
R(6) = 0.7615	R(13) = 0.8070
R(7) = 0.4317	R(14) = 0.6801

experiment MS-5

binomial distribution



Introduction

In this experiment you will use your random-number table and some other simple experimental equipment to study a particular probability distribution of wide usefulness, known as the binomial distribution.

To introduce the binomial distribution, we begin with several coin-tossing problems. When a symmetric coin is tossed, the probabilities for it to land "heads" or "tails" are each $\frac{1}{2}$ (i.e., 50%). We have no control over the way it lands, and each toss is independent of all previous tosses. Thus if we have just tossed a head, the probability of tossing another head is still $\frac{1}{2}$; the coin doesn't remember the previous toss.

What is the probability of tossing two heads in a row? This is a different question. The success of this event depends on the successes of two independent events, each one of which has a success probability of $\frac{1}{2}$; the probability for the composite event is the product of the separate probabilities, or $\frac{1}{4}$. Another way to obtain this result is to note that when the coin is tossed twice, there are four equally probable results:

$$HH \quad HT \quad TH \quad TT$$

Only one of these four is the event we want, so its probability is $\frac{1}{4}$. We would obtain the same result if we tossed two identical coins at the same time, instead of tossing one coin repeatedly. The time sequence is of no consequence.

In *three* tosses, each of the three has two possible outcomes, so the total number of equally probably events is 2^3, or 8. They are

$$HHH \quad HHT \quad HTH \quad HTT \quad THH \quad THT \quad TTH \quad TTT$$

Thus the probability for three heads in a row is $\frac{1}{8}$. In fact, the probability for *each* of the above events is $(\frac{1}{2})^3$. For N tosses, the probability of any specified arrangement of heads and tails is $(\frac{1}{2})^N$.

We now ask a slightly different question. What is the probability for exactly two heads in three tosses? We see that there are three different arrangements which give this result—*HHT*, *HTH*, and *THH*. Each has probability $\frac{1}{8}$, so the total probability is $\frac{3}{8}$. Similarly, the probability for exactly one head in three tosses is also $\frac{3}{8}$. The probability for some number of heads between zero and three is $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$, which is not very surprising.

What is the probability for n heads in N tosses? First, the probability for any particular arrangement of n heads and $N - n$ tails is $(\frac{1}{2})^N$. But how many different arrangements of n heads are possible? That is, what is the number of combinations of N things taken n at a time? To answer this question it is useful to imagine we have N coins, each with its own landing place. In distributing the n heads we have a choice of N places for the first one. For each of these we have a choice of any of the $N - 1$ remaining places for the second

for each of these $N-2$ for the third, and so on, until we place the nth head in any of the $(N-n+1)$ remaining positions. Thus the total number of arrangements of n heads among N tosses would *appear* to be

$$N(N-1)(N-2)(N-3)\cdots(N-n+1) \tag{44}$$

This is not correct; and the reason is that we have counted as separate many arrangements that are really equivalent. We do not care *which* of the n heads are in the various positions; a head is a head is a head. Thus to get the correct number of arrangements we must divide by the number of ways of rearranging the n heads among themselves. To compute this, note that in a rearrangement of n objects we can choose any one of the n first, any of the remaining $n-1$ second, and so on, until at the end only one remains. Thus the number of arrangements of n objects, usually called the number of *permutations* of n objects, is simply

$$n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1) = n! \tag{45}$$

The expression $n!$ is read "n factorial" and is an abbreviation for the product of all the integers in decreasing order, starting with n. By definition, $0! = 1$.

Finally, the number of different ways of arranging n heads among N trials (which is usually called the number of *combinations* of N things taken n at a time) is

$$\frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1)}{n!} \tag{46}$$

This expression, usually denoted by $\binom{N}{n}$, can be simplified by multiplying numerator and denominator by $(N-n)!$, which gives

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!\,n!} \tag{47}$$

Finally, the probability for n heads in N tosses, which we denote by $P_N(n)$, is

$$P_N(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^N \frac{N!}{(N-n)!n!} = \left(\frac{1}{2}\right)^N \binom{N}{n} \tag{48}$$

To check, we may compute the probability for two heads in three tosses, which we already know is $\frac{3}{8}$. In this case $n=2$ and $N=3$. We find

$$P_3(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3}{8}$$

It works! You may want to check some other possibilities.

We now consider a slight generalization. In the coin toss the probability for an individual head was $\frac{1}{2}$. Suppose we again have N independent events, but the probability for a win in each is not $\frac{1}{2}$ but some other number p between zero and unity. What then is the probability for exactly n wins in N trials?

The whole calculation goes through just as before, with one simple change. We have to find the probability for a specific particular arrangement of n wins, and multiply this by the number of ways of choosing n wins among N trials, which is again given by Eq. (47). The probability for a specific arrangement of n wins and $N-n$ losses, in which each win has a probability p and each loss a probability $q = 1-p$ is

$$p^n q^{N-n} = p^n(1-p)^{N-n} \tag{49}$$

Thus the probability for exactly n wins in N trials, when each trial has a win probability of p, is

$$P_{N,p}(n) = p^n q^{N-n}\binom{N}{n} = p^n q^{N-n}\frac{N!}{(N-n)!n!} \tag{50}$$

We note in the coin-tossing case that we have $p = q = \frac{1}{2}$, and this expression reduces to the previous result.

As a simple application of the generalized probability formula, consider rolling several icosohedral dice. For example, when rolling three dice, what is the probability of getting two 7's? Here the probability p for the individual event is $\frac{1}{10}$, and we have $N=3$, $n=2$. Thus the probability is

$$P_{3,1/10}(2) = \left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)^{3-2}\frac{3!}{(3-2)!2!} = 0.027$$

The probability distribution given by Eq. (50) is called the *binomial distribution* because of its close relation to the binomial expansion coefficients. It is not difficult to show, in fact, that

$$(q+p)^N = \sum_{n=0}^{N} p^n q^{N-n}\binom{N}{n} = \binom{N}{0}q^N + \binom{N}{1}q^{N-1}p + \binom{N}{2}q^{N-2}p^2 + \cdots + \binom{N}{N}p^N \tag{51}$$

Thus, we see immediately that

$$\sum_{n=0}^{N} P_{N,p}(n) = 1 \tag{52}$$

as expected. (Why is this expected?)

The *mean* value of n for the binomial distribution is of interest. Returning for the moment to the problem of flipping N coins, it is obvious that the average or *mean* number of heads is the total number of trials N multiplied by the probability ($\frac{1}{2}$) of heads in each trial, or $N/2$. It is plausible, although somewhat less obvious, that even when p is not equal to $\frac{1}{2}$, the mean value $\bar{n}$ is equal to

$$\bar{n} = Np \tag{53}$$

This can be shown to be true, in fact. The proof involves some "acrobatics" and will not be given here.* By similar acrobatics* one can calculate the *variance* for the distribution, which measures the "width" of the distribution. This turns out to be given simply by

$$\sigma^2 = Npq \tag{54}$$

POISSON DISTRIBUTION

When N is large, the binomial distribution formula becomes quite unwieldy because of the presence of factorials of large numbers. Fortunately in this case, there are approximate representations which are much easier to use. We consider here the appropriate approximation when p grows very small as N grows large, so the mean $\bar{n} = Np$ remains finite, leading to the *Poisson distribution*. A different approximation, appropriate when p *does not* grow small as N grows large, will be considered in Experiment MS-6. This is the *normal* or *Gaussian distribution*.

* For details of the proof, see H. D. Young, "Statistical Treatment of Experimental Data," McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.

The approximation valid for very large N and very small p is as follows: In this limit the only values of n with appreciable probabilities are very *small* compared to N. Consider first the factor

$$\frac{N!}{(N-n)!} = N(N-1)\cdots(N-n+1) \tag{55}$$

This is a product of n factors: none of which is significantly different from N. We therefore replace Eq. (55) by N^n. Second we write the factor q^{N-n} as

$$q^{N-n} = (1-p)^{N-n} = \frac{(1-p)^N}{(1-p)^n} \tag{56}$$

and note that the denominator is very nearly equal to unity because it is a number very close to unity raised to a not very large power. What remains is then

$$P_{N,p}(n) \simeq p^n(1-p)^N \frac{N^n}{n!} = \frac{(Np)^n(1-p)^N}{n!} \tag{57}$$

We now introduce the abbreviation $a = Np$, using it to eliminate N:

$$P_a(n) \simeq \frac{a^n(1-p)^{a/p}}{n!} = \frac{a^n}{n!}\left[(1-p)^{1/p}\right]^a \tag{58}$$

All that remains now is to evaluate the limit

$$\lim_{p\to 0}(1-p)^{1/p}$$

This limit is discussed in all books on elementary calculus and is shown to have the value $1/e$, where e is the base of natural logarithms. Finally, we obtain

$$P_a(n) = \frac{a^n e^{-a}}{n!} \tag{59}$$

which is called the *Poisson distribution*. It contains a single constant a instead of the two constants N and p which characterize the original binomial distribution. The reason for the difference is that we have taken the limit of the binomial distribution as $N \to \infty$ and $p \to 0$ such that the product Np remains finite.

In view of the way we have obtained the Poisson distribution, it should be clear that this distribution is the appropriate one when the number of individual events is extremely large and the probability p for a win in each event is extremely small, so that the product $a = Np$ remains finite. One of the most common applications of the Poisson distribution is the description of radioactivity. We may have 10^{20} radioactive nuclei, each with a probability 10^{-19} for decaying in a given time interval. Then the total number of decays in this time interval is distributed according to the Poisson distribution, with $N = 10^{20}$, $p = 10^{-19}$, and $a = 10$. We can also find immediately the mean $\bar{n}$ and variance for the Poisson distribution directly from the corresponding quantities for the binomial distribution, given by Eqs. (53) and (54). Since q is very nearly equal to unity, we find, in terms of the parameter a, the very simple results

$$\bar{n} = a \qquad \sigma^2 = a \tag{60}$$

experiment

The random-number table constructed for Experiment MS-4 provides a number of interesting illustrations of the binomial and Poisson distributions. Taking the three-digit random numbers as obtained from the dice, make a frequency count of the number of 7's in each group of three digits. That is, how many three-digit numbers contain *no* 7's, one 7, two 7's, or three 7's? Compare your results with the predictions of the parent binomial distribution. Compute the sample mean and variance and compare with those of the parent distribution.

Now consider groups of *nine* digits in the random-number table. Make a frequency count for the number of 7's in each square group of 9; there are 40 such groups in the table. Record your results in Table 12. Now repeat this

TABLE 12

Number	Frequency									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
0	18	7	3	1	0	0	0	0	0	13
	14	10	4	0	0	0	0	0	0	12
	16	10	3	0	0	0	0	0	0	11
	12	10	3	0	0	0	0	0	0	15
4	19	5	2	1	0	0	0	0	0	13
5	23	9	2	0	0	0	0	0	0	8
6	17	6	1	0	0	0	0	0	0	14
	16	4	1	0	0	0	0	0	0	13
8	18	6	1	0	0	0	0	0	0	14
9	10	2	1	0	0	0	0	0	0	11

count for each of the other digits and add the frequencies across each row to obtain the frequency count for *all* digits. Finally, to obtain the probabilities, divide by the total number of measurements. With 40 boxes and 10 digits, this is 400.

Compare your results with values of the binomial distribution $P_{N,1/10}(n)$. In computing values of this distribution, some labor can be saved by using a *recurrence relation* which expresses the value of $P(n+1)$ in terms of the value of $P(n)$. For the binomial distribution the appropriate relation, which can be verified by direct substitution of Eq. (50), is

$$P_{N,p}(n+1) = \frac{p(N-n)}{q(n+1)} P_{N,p}(n) \tag{61}$$

Thus, it is necessary only to compute $P_{N,p}(0)$ and use this recurrence relation. In general, this procedure can be somewhat hazardous, since any errors in the early stages will propagate through repeated use of the recurrence relation. In this particular case, though, the values of P decrease so rapidly with increasing n that there is no difficulty. In fact, you should find that for $n > 4$, the values are less than 10^{-3}, so there is no point in going any further.

Now consider the Poisson approximation for the distribution of digits in the groups of 9 random digits. We have $N = 9$ and $p = \frac{1}{10}$, so $a = Np = 0.9$. Recompute the probabilities for values of n from 0 to 4 using the Poisson distribution. Of course, we should not expect too precise agreement, because $N = 9$ is a long way from $N = \infty$, but the comparison is still interesting. Note in particular that the binomial distribution has the same value for $n = 0$ and $n = 1$ (an accident resulting from the particular values of N and p used), whereas the Poisson distribution gives values for $P(0)$ and $P(1)$ which are about 5% too large and too small, respectively. Does the accuracy of the approximation improve with larger n, or does it get worse?

questions

1. Derive the recurrence relation given by Eq. (61).
2. Derive the following recurrence relation for the Poisson distribution:

$$P_a(n+1) = \frac{a}{n+1} P_a(n)$$

3. Among a large number of eggs, 1% were found to be rotten. In a random sample of a dozen, what is the probability that none is rotten? One? More than one?
4. A man starts out for a Sunday afternoon walk, playing the following game. At each street corner, including the starting point, he tosses a coin. If it is heads he walks north one block, if tails he walks south one block. Find the probability distribution for the possible distances from the starting point after N tosses. If the man plays this game on several successive Sundays, find the *average* distance from the starting point after N tosses. How does this average vary with N?
5. Suppose that the number of babies in a delivery follows a Poisson distribution, and that the probability of twins is $\frac{1}{100}$. Find the probability for quintuplets.

experiment **MS-6**

normal distribution

Introduction

The normal or Gaussian distribution is the limiting case of the binomial distribution when N grows very large and p remains finite (as distinguished from the Poisson distribution, in which N grows large and p very small so that the *product* Np remains finite). The normal distribution is important for a variety of reasons. It is a useful approximation for the binomial distribution when large numbers are involved and the binomial distribution becomes unwieldy. More important, it is often found experimentally that random errors associated with physical measurements are distributed according to the normal distribution; it is thus of central importance in the analysis of experimental errors.

To derive the normal distribution from the binomial, we assume that the significant values of n are very large, since N is large, so P changes relatively little from one value of n to the next. In this case we can regard n as a continuous variable, rather than an integer. In addition we make use of the fact that the binomial distribution becomes more and more sharply peaked as N increases, as shown by the fact that $\bar{n}$ is proportional to N, while σ, which measures the width of the distribution, increases only as $\sqrt{N}$. Thus only the values of n relatively close to $\bar{n}$ have significant probabilities.

We begin with the recurrence relation introduced in Experiment MS-5, Eq. (61). Regarding P as a continuous function of the variable n, we can approximate the derivative of this function as $P(n+1) - P(n)$, taking $\Delta n = 1$. That is

$$P'(n) \simeq P(n+1) - P(n) = \left[\frac{p(N-n)}{q(n+1)} - 1\right] P(n) \qquad (62)$$

Because only large values of n are significant, we replace $(n+1)$ in denominator by n. Then rearranging and using the fact that $p + q = 1$, we obtain

$$\frac{P'(n)}{P(n)} = \frac{Np - n}{\sigma^2} \qquad (63)$$

We now make use of the fact that only values of n near $\bar{n} = Np$ are important; we replace n in the denominator by the average Np. Note that it would not be a reasonable approximation to make this replacement in the numerator, since it is the *difference* of n and Np, and is thus much more sensitive to small changes in n than is the denominator. We then find

$$\frac{P'(n)}{P(n)} = \frac{Np - n}{Npq} \qquad (64)$$

or, in terms of the mean $\bar{n} = Np$ and variance $\sigma^2 = Npq$ [cf. Eqs. (53) and (54)],

$$\frac{P'(n)}{P(n)} = \frac{\bar{n} - n}{\sigma^2} \tag{65}$$

We can now integrate both sides, writing the integration constant as $\ln C$:

$$\ln P(n) = \ln C - \frac{(n - \bar{n})^2}{2\sigma^2} \tag{66}$$

or, taking antilogs of both sides:

$$P(n) = Ce^{-(n-\bar{n})^2/2\sigma^2} \tag{67}$$

The value of the constant C is determined by the requirement that the *total* probability of all possible values of n must be unity. Instead of summing over n, we now *integrate*; C must be chosen to satisfy the relation

$$\int P(n)\,dn = 1 \tag{68}$$

Evaluation of the integral requires some trickery, and we simply state the result that C must be equal to $1/(2\pi\sigma)^{1/2}$. Finally, the normal distribution function is

$$P(n) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}(Npq)^{1/2}} e^{-(n-Np)^2/2Npq} = \frac{1}{(2\pi\sigma)^{1/2}} e^{-(n-\bar{n})^2/2\sigma^2} \tag{69}$$

Ordinarily the second of these forms is used, but we write both to show the relationship to the binomial distribution with the same mean and variance.

FIGURE 7

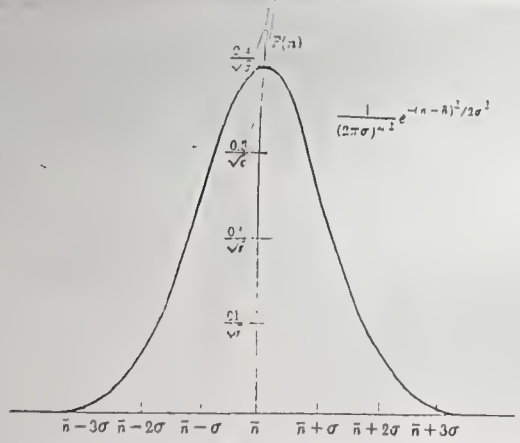


Figure 7 is a graph of Eq. (69), showing the significance of $\bar{n}$ and σ. The curve is symmetric about $n = \bar{n}$, and σ as always characterizes the "width" of the distribution. At the values $n = \bar{n} \pm \sigma$, the curve has dropped to $e^{-1/2}$ of its maximum value at $n = \bar{n}$. It can be shown that the total probability for a value of n between these limits is about 0.683. This value is obtained by

integrating Eq. (69) between the limits $n = \bar{n} - \sigma$ and $n = \bar{n} + \sigma$, which requires numerical approximations. Similarly, the probability for n to fall between $\bar{n} - 2\sigma$ and $\bar{n} + 2\sigma$ is 0.954, and for $\bar{n} \pm 3\sigma$ it is 0.997. That is, there is a probability of only 0.003 for a value of n to differ from $\bar{n}$ by more than $\pm 3\sigma$.

experiment

We can now apply some tests to our random-number table to find out whether it is really random. Consider, for example, the digit frequency obtained in Experiment MS-4. With 360 digits we expect on the average to obtain 36 of each number from 0 to 9. Suppose we find 39 sevens: does this mean the numbers are not really random, or is this number within the realm of reasonable probability?

To answer this question, we note first that the probability for a certain number n of 7's in a 360-digit random-number table is given by the binomial distribution with $N = 360$, $p = \frac{1}{10}$. The mean of this distribution is $\bar{n} = Np = 360 \times \frac{1}{10} = 36$, as just observed. The standard deviation is given by

$$\sigma = (Npq)^{1/2} = (360 \times \tfrac{1}{10}\tfrac{9}{10})^{1/2} = 5.7 \simeq 6$$

Approximating the binomial distribution by a normal distribution, we note that there is a 68% chance that any digit frequency will be within one standard deviation of the mean (i.e., between 30 and 42), and only a 5% chance that it will *not* be within *two* standard deviations (i.e., between 24 and 48). Note also that the probability for it to be *exactly* 36 is rather small. Compute this probability.

Using the above criterion, check your digit frequencies from Experiment MS-4 for evidence of non-randomness.

Another test using the same principle slightly disguised is to ask whether the random digits are more likely to be odd or even. The probability distribution for the number of even digits in a table of 360 is a binomial distribution with $N = 360$ and $p = \frac{1}{2}$ (since an individual digit is equally likely to be odd or even). Find $\bar{n}$ and σ correspondingly to these values, and from these compute the limits of the 65 and 95% probability brackets. Count the number of even digits in your table. Is there any indication of nonrandomness?

Another application of this method is the determination of whether or not a coin really has equal probability for heads or tails. Suppose we flip a coin 100 times and find 52 heads and 48 tails. Is the coin lopsided? Using the normal approximation for the binomial distribution, we may again compute ranges of n (with a mean of 50) corresponding to various probabilities. If the observed value of n is outside the 95% range, we suspect something is amiss. Select a coin, flip it 100 times, record the results, and interpret them.

ANALYSIS OF RANDOM ERRORS IN MEASUREMENTS

One of the most important applications of the normal distribution function is concerned with the analysis of random errors in measurements. This is dangerous territory for the uninitiated: an unwary student can become so

overawed by the machinery of statistical data analysis as to think that in it lies the entire secret of success in handling experimental errors. Such an attitude would be dangerously misguided.

It is helpful to distinguish between *systematic* errors and *random* errors. Systematic errors, as the name suggests, are intrinsic in the experimental setup. Simple examples are a voltmeter which is not properly zeroed, a ruler which is inaccurate because of thermal expansion, a thermometer which reads correctly only when totally immersed, and so on. Systematic errors may change with time either because of some property of the system or because of variation of some external influence such as temperature of the room, line voltage, building vibration, or stray magnetic fields.

Very often in experimental work systematic errors are more important than random errors. They are also much more difficult to guard against and deal with. There are no general principles for avoiding systematic errors: only an experimenter whose skill has come through long experience can design experiments to avoid systematic errors, and detect and correct them when they occur.

Random errors are produced by a large number of unpredictable and unknown variations in the experimental situation. They can result from small errors in judgment on the part of the observer, such as in estimating tenths of the smallest scale division. Other causes include any unpredictable fluctuations in the experimental conditions, provided these fluctuations are really random. It is found empirically that such random errors are frequently distributed according to the normal distribution function, and use of this fact can be useful in minimizing the effects of random errors. We give here a few useful results.

Suppose we measure a certain physical quantity several times, obtaining several values each of which deviates somewhat from the true value of the quantity. If these deviations are due purely to random errors, and if the errors are distributed according to the normal distribution function, then it can be shown that the best estimate of the value of the quantity which can be obtained from the data is the arithmetic mean or average, which is a reasonable enough result.

Now, how reliable is this mean? One can calculate a standard deviation for the individual observations, and this gives an index of their reproducibility. We expect the *mean* to be more reliable than the individual measurements. In fact, if we take several sets of N observations each, compute the mean and standard deviation for each set, and then find the standard deviation for the *means*, we can show that this is smaller than those of the individual measurements in the set by a factor of approximately $\sqrt{N}$. That is,

$$\sigma_{\text{mean}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

and the standard deviation of the mean is usually taken as an index of the precision of the mean. Note, however, that this conclusion is valid only if one is absolutely certain that the errors are entirely random, and that there is no systematic error which could contribute an uncertainty greater than that indicated by the purely statistical considerations.

Now suppose we want to compute a quantity Q which is determined from a series of measured quantities $a, b, c, \ldots$, by means of a known relation which we may write in general as

$$Q = f(a, b, c, \ldots)$$

Suppose further that each of the quantities a, b, ..., has an associated standard deviation σ_a, σ_b, ... What is the standard deviation of the resulting value of Q?

We can show* that the standard deviation of Q, which we may call σ_Q should be calculated from the prescription

$$\sigma_Q^2 = \left(\frac{\partial Q}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \ldots$$

This is the basic relation for propagation of errors, which is the analysis of the effect which errors in individual numbers have on numbers calculated from them.

questions

1 Considering the normal distribution as an approximation of the binomial, do you expect the approximation to be most accurate for values of n near $\bar{n}$, or for values far from $\bar{n}$, in the "tails" of the distribution? Explain.

2 The "probable error" of a distribution is defined as the error such that the probability of occurrence of an error whose absolute value is less than this value is one-half. Using a table of probability integrals, find the probable error for the normal distribution and express it as a multiple of σ. Is this the *most* probable error? If not, what is?

3 Find the variance $\langle (n - \bar{n})^2 \rangle_{av}$ for the normal distribution expressed in terms of σ.

4 Find the distance from the center of the normal distribution to either inflection point in terms of σ.

* H. D. Young, "Statistical Treatment of Experimental Data," McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.

t=10 s. aralıklarla ölçüm yapılıyor

n (sayım/s)

~~15~~	~~10~~	~~5~~
~~16~~	~~11~~	~~11~~ → 40
~~11~~		
~~12~~	~~11~~	~~6~~
~~8~~		
17	~~14~~	~~9~~
~~6~~	~~11~~	
~~13~~	~~7~~	~~7~~
~~10~~	~~10~~	~~9~~
~~10~~	~~6~~	~~8~~
~~7~~	~~14~~	~~14~~
~~12~~	~~7~~	→ 30
~~13~~	~~12~~	~~10~~
~~13~~	~~11~~	~~9~~
~~13~~	~~7~~	~~7~~
~~10~~	~~10~~	~~14~~
~~8~~	~~16~~	
~~5~~	~~10~~	
~~13~~	~~7~~	
~~16~~	~~8~~	

n	F(n)
5	2
6	3
7	7
8	3
9	4
10	10
11	6
12	3
13	4

n	F(n)
15	2
16	1
17	1

~~25~~	
28	
~~15~~	
31	
~~18~~	
~~18~~	
~~24~~	
~~25~~	
~~21~~	
~~25~~	
~~15~~	
~~22~~	
~~20~~	
24	
~~20~~	
~~16~~	
~~20~~ → 20	
~~25~~	
~~11~~	
~~22~~	
~~24~~	
~~19~~	

n	F(n)
11	1
15	2
16	2
18	2
19	1
20	3
21	1
22	1

n	F(n)
23	2
24	1
[illegible]	3
[illegible]	1
[illegible]	1

t = 20, n ile

$$\bar{n} = \frac{\sum n F(n)}{\sum f_n}$$

1. (sayım) $\bar{n} = \frac{510}{50} = 10.2$

a = 10.2

2. (sayım) $\bar{n} = \frac{524}{75} = 6.96$

a = ~~20.28~~ 20.36

Histogramda gösterilmek için 50 ile çarp

P(5) = 34×10⁻⁷ P(16) = 24×10⁻⁷
P(6) = 58×10⁻⁷ P(17) = 16×10⁻⁷
P(7) = 84×10⁻⁷
P(8) = 108×10⁻⁷
P(9) = 122×10⁻⁷
P(10) = 126×10⁻⁷
P(11) = 115×10⁻⁷
P(12) = 98×10⁻⁷
P(13) = 77×10⁻⁷
P(14) = 56×10⁻⁷
P(15) = 38×10⁻⁷

X_{2i}

P(11) = 6.78×10⁻³
P(15) = 39.95×10⁻³
P(16) = 52.36
[illegible]
P(17) = 82.32
[illegible]
P(21) 86.4
P(22) 82.61
P(23) 75.28
P(24) [illegible]

Fugin Kendi - 1990

experiment **NP-2**

radioactive decay

Introduction

In this experiment we use the Geiger-Mueller tube as a detector of radioactive decay. We shall be interested in measuring the *fluctuations* in the number of events counted in some interval of time. If the interval of time is sufficiently long and the counting rate sufficiently low, we can count individual events. For higher counting rates we may use a scaler or, alternatively, a device for integrating the total charge from the G-M tube. In the present experiment we shall also introduce a simple variation on these techniques. In addition to counting for a definite period of time, we shall introduce the pulses into a filter which has a time constant $\tau = RC$. As we shall see, the fluctuations just correspond to those in a definite time interval $\Delta t = \frac{1}{2}\tau$.

A source containing a radioactive element ordinarily has a very large number of unstable nuclei, and the probability for any one of them to decay in a specified time interval is very small. As discussed in Experiment MS-5, the probability for n decays to occur in a specified time interval is given by the Poisson distribution

$$P_a(n) = \frac{a^n e^{-a}}{n!} \tag{10}$$

where a is equal to the *average* number of counts ($\bar{n}$) in the interval. The standard deviation σ of this distribution is given by

$$\sigma^2 = a = \bar{n} \tag{11}$$

As $\bar{n}$ becomes larger and larger, the Poisson distribution of Eq. (10) approaches the normal, or Gaussian, distribution given by Eq. (67) in the Mathematics and Statistics Unit.

$$P(n) = (2\pi\sigma)^{-1/2} e^{-(n-\bar{n})^2/2\sigma^2} \tag{12}$$

where $\sigma = (\bar{n})^{1/2}$ is the standard deviation, in general, defined by

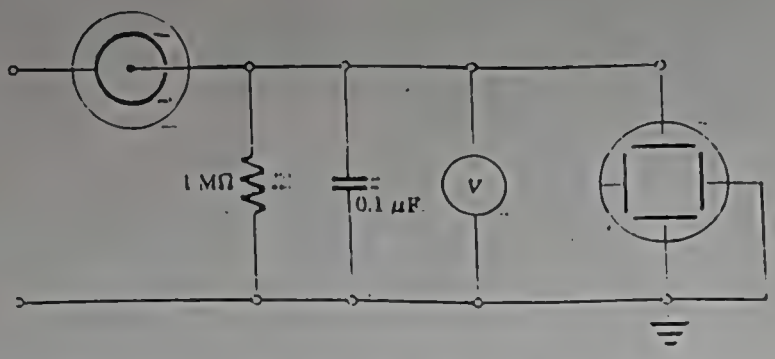
$$\sigma^2 = \sum_n (n - \bar{n})^2 P(n)$$

When the Gaussian distribution is used as an approximate representation of the Poisson, we have $a = \bar{n} = \sigma^2$.

We may now consider the matter of long-term charge fluctuations, as observed as voltage fluctuations detected by the oscilloscope, with input connected as in Fig. 5. Roughly speaking, we may expect that the observed fluctuations in voltage will correspond to the variation in charge accumulation during one time constant of the circuit, $\tau = RC$. Under these circumstances, the charge fluctuation will be of the order

$$\Delta Q = (\bar{n})^{1/2} q = (r\tau)^{1/2} q \tag{13}$$

FIGURE 6



where q is the charge per pulse and r is the counting rate. The fluctuation in voltage is given by

$$\Delta V = \frac{\Delta Q}{C} \tag{14}$$

Since the mean voltage across the circuit is given by

$$V = rqR \tag{15}$$

we obtain for the ratio of ΔV over V

$$\frac{\Delta V}{V} \approx (r\tau)^{-1/2} \tag{16}$$

The above treatment has been rough in two respects. First, we are not really concerned with the fluctuations in a definite interval of time. Rather, we have a system which relaxes exponentially. In Eq. (26) we shall show that the appropriate standard deviation in charge is given by

$$\Delta Q = \left(\frac{r\tau}{2}\right)^{1/2} q \tag{17}$$

Second, if we attempt to judge the peak-to-peak amplitude of the fluctuations by eye, how many standard deviations do we take in? This is in large part a question of human response and memory, and a number of studies have suggested that about four standard deviations is appropriate. This would mean that a measure of the fractional fluctuations would be given by

$$\frac{4\,\Delta V}{V} = 4\left(\frac{2}{r\tau}\right)^{1/2} \tag{18}$$

Charge Fluctuations

In this experiment we examine random events in two ways. In the first way we count the number of events taking place in an interval of duration Δt. We find that (1) where there is no limit to the number of possible events, and (2) where the number of events observed on the average is large, we obtain a normal, or Gaussian, distribution for the probability of observing n events in the interval Δt. The root-mean-square displacement from the average, or standard deviation, is simply equal to the square root of the average number of events $\bar{n}$ occurring in the interval Δt.

Where we are interested in an actual experiment, such as the collection of

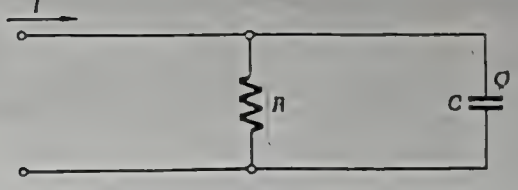
charge from a G-M tube, the standard deviation in collected charge is given by

$$\Delta Q = (r\,\Delta t)^{1/2}\, q \tag{19}$$

where r is the mean counting rate and q is the charge collected per event.

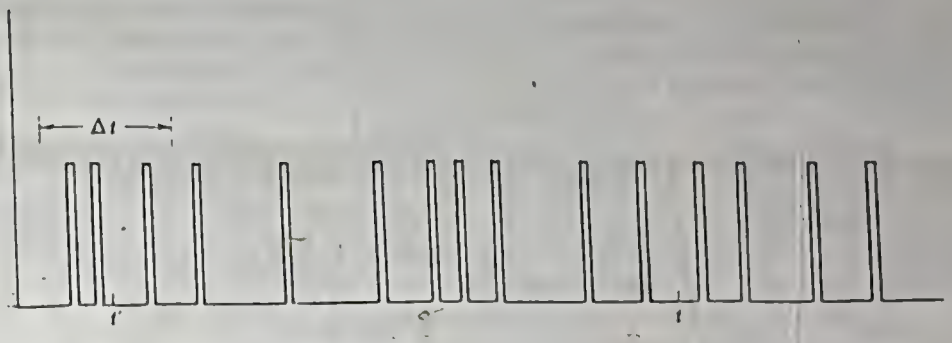
We now ask the following slightly different question. Instead of counting events, let us inject the charge increments q into an RC circuit as shown in Fig. 6. Again, if r is the mean counting rate, what will be the root-mean-square fluctuation in charge on the capacitor?

FIGURE 6



The current I which flows into the filter will be a random function of the time of the form shown in Fig. 7. Here q is the charge per event and $I = rq$ is

FIGURE 7



the mean current. What is the mean charge on the capacitor C? Since the voltage across the capacitor and across the resistor must be equal we have

$$\frac{\bar{Q}}{C} = \bar{I}R = rqR \tag{20}$$

Solving Eq. (20) for $\bar{Q}$, we obtain

$$\bar{Q} = r\tau q \tag{21}$$

where $\tau = RC$ is the time constant of the filter. Let us next compute the mean-square deviation in charge ΔQ^2 from the average value $\bar{Q}$. In a short interval of time Δt at t' as shown in Fig. 7 we obtain a mean-square deviation

$$r\Delta Q^2(t') = rq^2\,\Delta t \tag{22}$$

Since charge placed on the capacitor decays according to the equation

$$Q(t) = Q(t')e^{-(t-t')/\tau} \tag{23}$$

we can expect the mean-square charge accumulated in Δt at t' to decay as

$$\Delta Q^2(t) = rq^2\,\Delta t\, e^{-2(t-t')/\tau} \tag{24}$$

Finally, we must integrate over all increments of previous time to obtain

$$\Delta Q^2 = rq^2 \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-t')/\tau}\, dt' = \tfrac{1}{2} r\tau q^2 \qquad (25)$$

Taking the square root of Eq. (25), we obtain for the root-mean-square charge deviation

$$\Delta Q = \left(\frac{r\tau}{2}\right)^{1/2} q \qquad (26)$$

and we see that the standard deviation in charge for an exponential filter of time constant τ is the same as that for an interval $\Delta t = \tau/2$.

Output Spectrum of a Scaler One problem which we can investigate experimentally is the output spectrum of a scaler. Let us imagine as in Fig. 8 that pulses enter a scaler at a mean rate r and leave at a mean rate r/S.

FIGURE 8

Are the output pulses randomly distributed? That is, may they be characterized by a Poisson distribution? If the pulses enter a filter of time constant $\tau = RC$, what will be the rms charge variation ΔQ?

First the probability of n input pulses in a time Δt is given from Eq. (10) by

$$P_{\text{in}}(n) = \frac{(\bar{n})^n e^{-\bar{n}}}{n!} \qquad (27)$$

where $\bar{n} = r\,\Delta t$. Now the probability of m output pulses during the same interval must just be equal to the sum of the probabilities of mS to $(m+1)S$ input pulses:

$$P_{\text{out}}(m) = \sum_{n=mS}^{(m+1)S-1} \frac{(\bar{n})^n e^{-\bar{n}}}{n!} \qquad (28)$$

If S is sufficiently small so that $P_{\text{in}}(n)$ is slowly varying over the interval $\Delta n = S$, we may write Eq. (28) as

$$P_{\text{out}}(m) = Se^{-\bar{m}S} \frac{(\bar{m}S)^{mS}}{(mS)!} \qquad (29)$$

Finally, if Δt is sufficiently long so that $\bar{m}S$ is large, we obtain a Gaussian distribution

$$P_{\text{out}}(m) = (2\pi\sigma)^{-1/2}\, e^{-(m-\bar{m})^2/2\sigma^2} \qquad (30)$$

where $\sigma = (\bar{m}/S)^{1/2} = (\bar{n})^{1/2}/S$.

Note that the standard deviation in the output is not equal to $(\bar{m})^{1/2}$ as for random pulses, but is equal to $(\bar{m}/S)^{1/2}$. Thus, the output pulses are more evenly spaced than random pulses would be.

With a scaler available you may wish to verify that the charge fluctuations will now be given by

$$\Delta Q = \left(\frac{r\tau}{2}\right)^{1/2} \frac{q}{S} \qquad (31)$$

where r is the input pulse rate.

Ortalama 10 sayma olsa çağımızı geçer.

experiment

1) Devreyi Kur
2) G-M'den geçen voltajı arttır ve osiloskopta sayımlar görülsün
3) Voltajı 50V'a arttır.
4) ^{137}Cs'yi uzaklaştır.
5) Bu bir önceki sayım yrısına düşsün.
6) 10 s.'lik 50 inver valde say.
$\bar{n}$'i hesapla.
7) n sayımıya kırıcılık histogramaiz.
$\bar{n}$'i bul.

1 Poisson distribution

Assemble the circuit shown in Fig. 3. With a 10-μCi ^{137}Cs source in the vicinity of the G-M tube, increase the voltage across the tube until counts become visible on the oscilloscope. Now increase the voltage approximately 50 V by a one-tenth turn increase of the control knob. This should place you within the plateau of the tube. With the oscilloscope on its slowest sweep, remove the ^{137}Cs source sufficiently far from the G-M tube so that the average counting rate as observed on the oscilloscope screen is about one count every second. Determine the number of counts in successive 10-sec intervals, counting 50 such intervals.

Plot a histogram of your data, with the frequency of n counts (that is, the number of intervals in which each number of counts is observed) plotted as a function of n. Use your experimental data to compute $\bar{n}$. Compute values of the Poisson distribution using this $\bar{n} = a$, for all values of n which you observed. Multiply each value of the distribution, which gives probabilities for various values of n, by 50 to obtain the corresponding expected frequencies, and plot these on the histogram for comparison with the experimental results.

2 longer intervals Daha uzun aralıklar.

By adding the counts in successive 10-sec intervals, you may obtain data for twenty-five 20-sec intervals. Plot this histogram and, for comparison, the expected frequency. Note that as $\bar{n}$ becomes larger and larger, the distribution becomes more and more sharply peaked around $\bar{n}$.

3 long-term fluctuations Uzun süreli dalgalanma

As a convenient example of long-term fluctuations, assemble the circuit shown in Fig. 5. Bring the ^{137}Cs source sufficiently close to the G-M tube so that an appreciable bounce is observed in the oscilloscope trace. Determine the fractional amplitude of the fluctuations for a wide range of counting rates and time constants, and compare your observations with Eq. (18).

$a = \bar{n} = Np$

questions

1 The parameter a in the Poisson distribution, Eq. (10), is estimated by calculating $\bar{n}$ from your data. How reliable is this result? That is, what is the standard deviation of a obtained in this way?

2 In judging the peak-to-peak amplitude of charge fluctuations as observed with an oscilloscope, why is it reasonable to take this as about four times the standard deviation of the charge fluctuation?

3 If the average number of decays counted in a certain time interval is $\bar{n}$, what is the probability that in any one interval at least $2\bar{n}$ decays will be observed?

Model experiment for determining the speed distribution in a gas

A1.1.1.3

The speed of the molecules of a gas is not uniform. This also applies to the model gas. The "molecules" are ranked according to their velocity and the distribution thus obtained is compared with the Maxwell Distribution of an actual gas [1], [2].

Materials

Kinetic theory apparatus	09060.93*	1
Plate with circular sectors (1 bag of cold glue is included)	09062.00	1
Cold glue (4 bags), spare	09062.01	1
Painter's brush, flat, hard	40979.00	1
Spirit level	02124.00	1
Special sliding resistor, 500 Ω	06111.00	1
Receptacle with switch	07340.00	1
Demonstration stopclock	03074.00	1
Glass beaker, short, 600 ml	36015.00	1
Test tube, 160×16 mm	36297.01	12
Test tube rack, wood	37686.00	1
T-base, medium, with leveling screw	02004.01	2
T-base, small	02003.00	1
Rod, 25 cm	02021.00	1
Mat	02072.00	1
Tourostrob	21801.93*	1
Neon lamp 220 V, triangle electrode	06652.93*	1
Lamp holder Ed 27, on stem	06176.00	1
Stand tube	02060.00	1
Barrel base, large	02006.00	1
In addition, according to Fig. 4: Receiver with recording chamber	09061.00	1

* for a line voltage of 220 V a.c., others on request

Method

The model molecules (glass spheres, see A 1.1.1.1) can leave the chamber volume (Fig. 1) through a filter chamber (Fig. 2). The filter chamber has two openings "4" and "5" so that only those glass spheres whose velocity vectors are within a small spatial angle can escape to the outside. The speed v of horizontally discharged spheres can be calculated from the range s:

$$s = v \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}}, \qquad (1)$$

where H = drop height. For the remaining spheres, equation (1) holds approximately.

The ranges are proportional to the speeds of the individual spheres because all spheres have the same drop height. The number of spheres in equidistant concentric ring sectors around the opening "5" yields the number of spheres with speed between v and $v + \Delta v$.

Arrangement

There are two systems for receiving the spheres:

a) Plate with ring sectors, Fig. 3. The plate ist coated with an adhesive which retains the dropping spheres at the point on which they drop.

b) Receiver with recording chamber, Fig. 4. The spheres are caught in grooves shaped as ring sectors (Fig. 3) and are transferred after completion of the test into the recording chamber located below. In this system it is possible to collect a larger number of spheres than with the system described in a; in addition, shadow projection of the distribution is also possible.

Procedure

The height of the chamber cover should be adjusted to approximately 60 mm so that the spheres are uniformly distributed over the volume.

The speed distribution of the glass spheres must be maintained constant during the test. The excitation frequency (for example 3000/min) must therefore be constantly checked with a neon lamp or stroboscope and, if necessary, re-adjusted; and the number of spheres ejected from the chamber must be regularly replaced (also see text to Fig. 5).

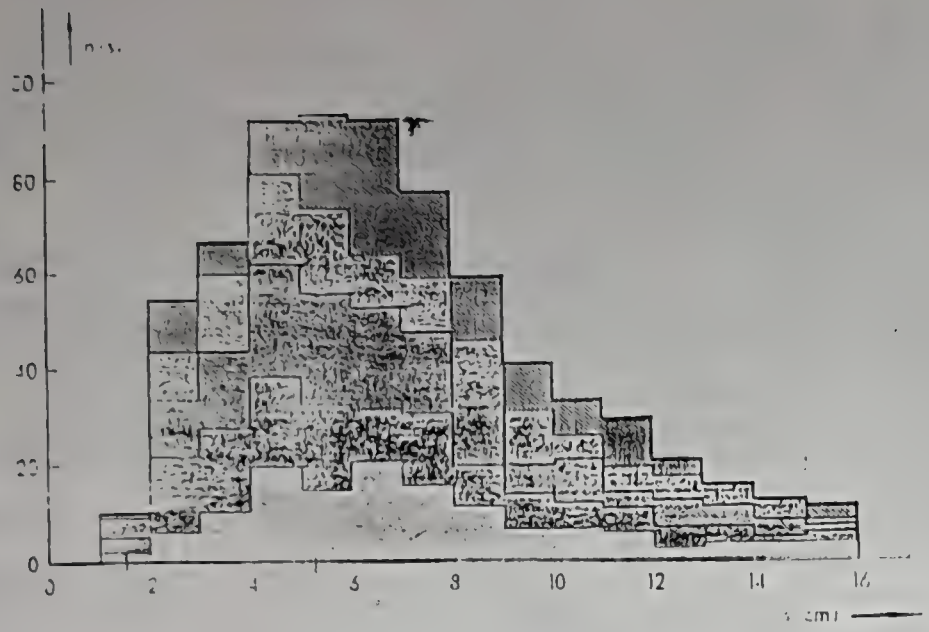


Fig. 5: Results of a measurement series using the plate with ring sectors. The number n(s) of spheres is plotted relative to the range s, the number being counted after an experiment duration of 2, 4, 6, 8 and 10 minutes.

400 glass spheres in the chamber volume, chamber height 60 mm, excitation frequency 3000/min, replenishment 80 spheres/min

Result

Fig. 5 shows the result of a measurement series. The similarity with the Maxwell distribution can be clearly recognised. There is a most frequent velocity, low and high velocities are less frequent. Most spheres are found in a velocity interval v to $v + \Delta v$ corresponding to a range of $s = 5\,cm$ to $s = 6\,cm$. This velocity is therefore the most frequent. The height (drop height $H = 8\,cm$) is obtained from equation (1)

$$v = \frac{s \cdot \sqrt{g}}{\sqrt{2 \cdot H}}$$

$$v = \frac{5.5 \cdot \sqrt{g}}{\sqrt{2 \cdot 8}} \approx 40\,\frac{cm}{s}.$$

The value of $s = 16\,cm$, that is to say

$$v = 115\,cm/s$$

corresponds to the most frequently occuring velocity.

The displacement λ which is covered by the spheres between two impacts on a time average–the mean free displacement length–may be expressed (according to [2]) as

$$\lambda = \frac{V}{N \cdot 4\,\pi r^2\,\sqrt{2}}.$$

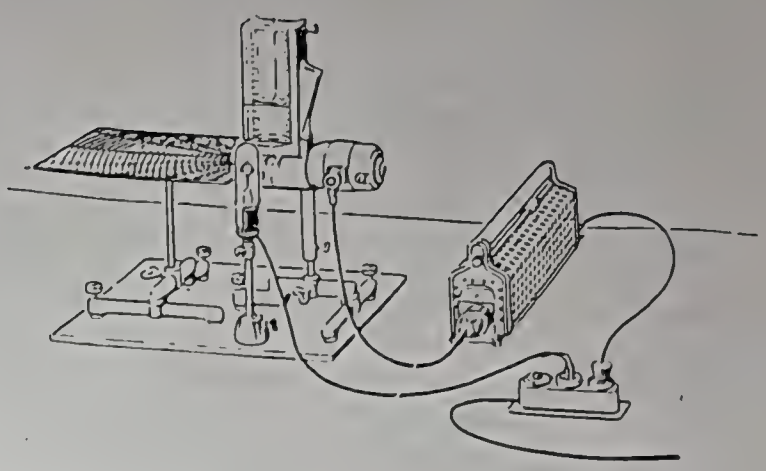


Fig. 3: Experiment layout with plate and ring sectors for collecting the spheres

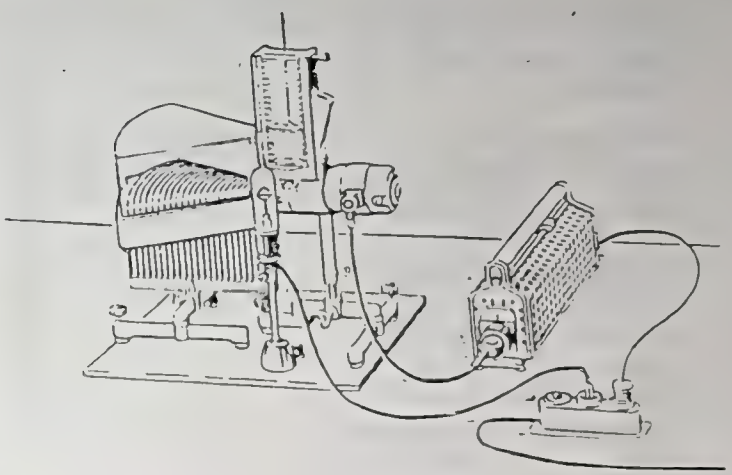
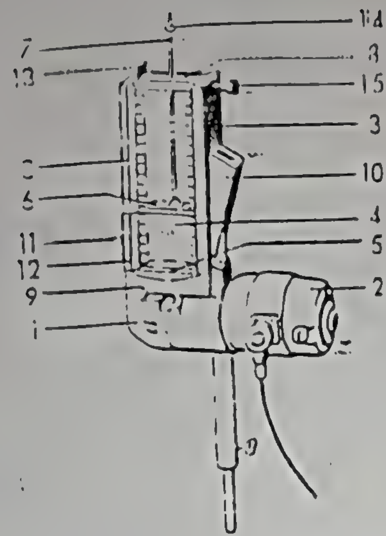


Fig. 4: Experiment layout with collector and recording chamber

[illegible] apparatus. aparat

1 [illegible]
2 Electric motor
3 Walls
4 Glass plates with millimeter divisions
5 Bottom plate (vertically movable)
6 Cover (can be moved vertically or locked with screw 15)
7 Guide rod for cover 6
8 Closing piece with screw 15
9 Circular spirit level
10 Funnel section for filling-in the spheres
11 Outlet openings for the spheres
12 Retaining slide for collecting and filter chambers
13 Slide for closing the openings 11
14 Retaining ring for slotted weights
15 Screw for locking the cover 6 (with guide rod 7)



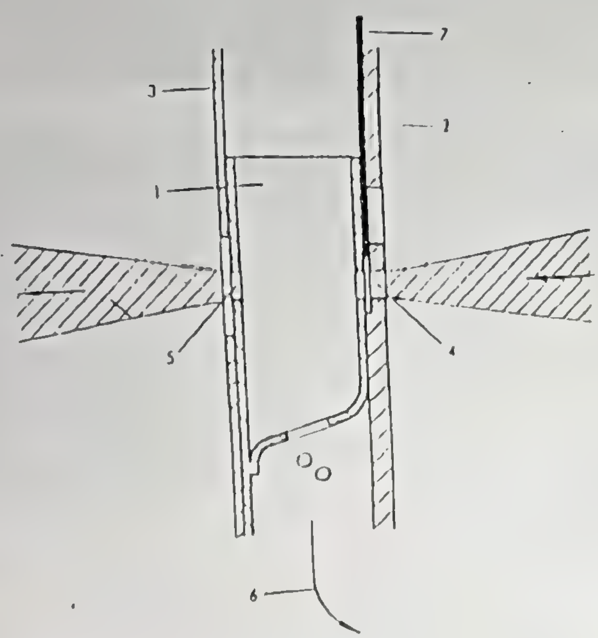


Fig. 2: Section through the filter chamber and spatial angle for spheres passing through the filter chamber

1 Filter chamber
2 Wall of the chamber volume
3 Retaining slide for collecting and filter chamber
4 Entry opening for glass spheres
5 Exit opening for glass spheres
6 Return path into the chamber interior for separated spheres
7 Lower part of the slide (item 13 in Fig. 1) for blocking the openings

Given the values

$$V = (12 \times 6)\ \text{cm}^3 = 72\ \text{cm}^3$$

$$N = 400 \text{ spheres}$$

$$r \approx 0.1\ \text{cm}$$

we have

$$\lambda \approx 1\ \text{cm}$$

The mean number of collisions per second is

$$\bar{z} = \frac{v}{\lambda}$$

$$\bar{z} = \frac{40\ \text{cm/s}}{1\ \text{cm}} = 40\ \text{s}^{-1}.$$

Literature references

[1] R. W. Pohl: Mechanik, Akustik und Wärmelehre, 14th edition, Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer, 1959, p. 133

[2] C. Gerthsen: Physik. Ein Lehrbuch, 4th edition, Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer, 1956, p. 67

[3] Operating instructions: Kinetic theory apparatus, PHYWE Cat.-No. 09060.93

[4] Kurt May: Modellversuche zur kinetischen Theorie. (Beiträge zum mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Braunschweig: Vieweg, March 1963, No. 8)

Life-Time Warranty

Life-Time Warranty

experiment MS-3

loaded dice

Introduction

The last four experiments in this unit deal with probability and statistics. As mentioned in the INTRODUCTION for this unit, there are two basic reasons for the importance of statistics in physics. One has to do with the analysis of physical measurements containing random and unpredictable experimental errors; the other is concerned with statistical descriptions of physical systems, such as a gas containing a very large number of molecules, and with phenomena which are intrinsically statistical, such as radioactive decay and quantum-mechanical descriptions of systems.

The present experiment poses a few questions about a simple physical system which, while it is not very directly related to basic physics, is nevertheless of some practical interest. We shall not be able to answer completely all the questions we raise, and some of the answers will be intuitive and imprecise. Nevertheless, this beginning will point the way to be followed in the remaining experiments.

In the present experiment we have a pair of dice; one has been loaded by the insertion of lead slugs, and the other is unloaded. The problem is to determine which die is loaded and on which side. Now if a problem like this were presented to a physicist, he might suggest various ways of making this determination. One way would be to find a liquid with about the same density as the die, immerse the die in the liquid, and note whether one particular side always faces up. Alternatively, the die might be permitted to fall in a viscous liquid that is less dense than the die. Another method (somewhat less accurate) would be to suspend the die from threads attached in several different ways and in this way locate the center of mass.

In this experiment we take the gambler's approach, which may appear to a physicist to be the worst possible method. We simply toss each die repeatedly, recording each time which face comes up. The problem with this method is that there are likely to be large errors. Which face comes up depends on the position when the die is released, the amount of spin that it has and how it hits the backboard and table, as well as how it is loaded. However, if we assume that all these factors are reasonably random and we toss the die a large enough number of times, we may expect that we should be able to detect whether the die is loaded, and how.

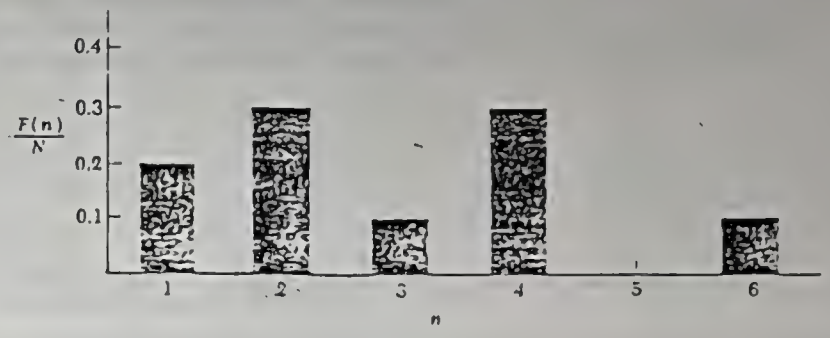
A much more difficult question is the following: *How sure are we* that the die is unloaded or loaded in a particular way? In the analysis of this experiment we shall quote without proof the result of statistical analysis of problems of this sort. In later experiments we shall develop the theory needed for this experiment. But you may find it more interesting to do a real experiment first!

experiment

You should have two dice, numbered 1 and 2. Let N be the number of times a die is tossed in a particular experiment and n be the number that comes up. That is, n ranges from 1 to 6. The number of times each number comes up is written $F(n)$ and called the *frequency*. Thus in a given experiment, if the number 1 appeared 7 times, the number 2 appeared 5 times, and so on, we would have $F(1) = 7$, $F(2) = 5$, and so on.

Toss each die 10 times ($N = 10$) and record the frequency with which each face comes up, for each die. Estimate the probability for each face by computing $F(n)/N$ for each frequency, and plot histograms of the data, similar to that shown in Fig. 4.

FIGURE 4



We may now compare this with the theoretical probability, which we denote by $f(n)$. What should we expect $f(n)$ to be? For an unloaded die there are six equally likely events, corresponding to the six faces, so we expect $f(n) = \frac{1}{6} = 0.1666\cdots$. If we observe deviations from this value, it is either because N was too small and random fluctuations were significant or because there was a systematic difference between faces (the die was loaded). The statistical problem is to determine from an analysis of the data whether the observed deviation from $f(n) = \frac{1}{6}$ is significant.

For a die we may expect on physical grounds that if a given side comes up more often than random, it does so at the expense of the opposite side. Thus we may want to look at *differences* in probability for opposite sides. In Fig. 5 we replot the histogram of Fig. 4 in this way. Can you guess from your data which die is loaded and which is the heavy face? Make a tentative guess.

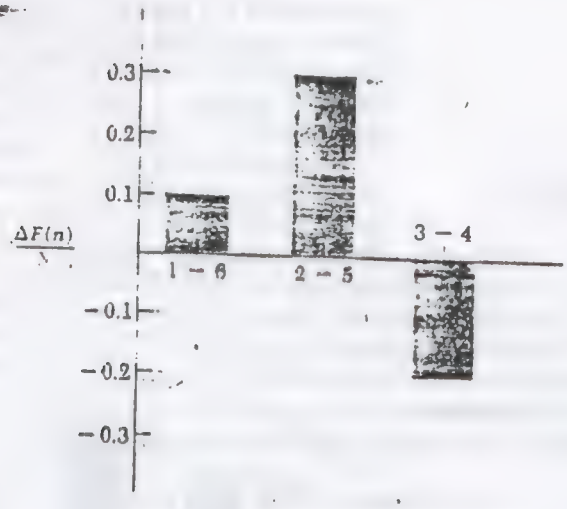
Now toss each die 100 times recording the frequencies. Plot new probability histograms similar to Figs. 4 and 5. *Now* which die do you think is loaded? Which do you think is the heavy face? Were you right the first time? The chances are that you were fooled.

Now we can ask the following questions:

- How sure (based on your data) did you have a right to be sure the first time—after 10 tosses?
- How sure did you have a right to be after 100 tosses?
- How many tosses do you have to make in order that you have significant data? This is, of course, a very useful thing to know because there may be little

point in continuing to toss the die if you can already identify the heavy faces with 95% certainty.

FIGURE 5



THE CHI-SQUARE TEST

If we make N observations and each one has ν possible results ($\nu = 6$ for a die), we can make a prediction about the deviation to be expected between the observed frequency $F(n)$ of a given event and the predicted frequency $Nf(n)$. For 60 trials we may find that the frequency for a given n is 12 instead of the 10 we expect; for 600 we might find 94 instead of the 100 we expect. The important point though, is that as the number of trials N increases, the *difference* between predicted and observed frequencies does not increase as rapidly as the predicted frequency itself. In fact, there is reason to believe that on the average this difference is likely to increase only as the *square-root* of the predicted frequency. We are not yet in a position to justify this statement in detail, so for the moment we take it on faith, anticipating more thorough discussion in later experiments.

According to the above statement, the quantity

$$\frac{F(n) - Nf(n)}{[Nf(n)]^{1/2}}$$

for any given value of n ought to have a magnitude the order of unity. To eliminate the possibility of negative differences, we square the above expression; then we add these terms for the ν different values of n (again, for a die $\nu = 6$). The result is usually denoted by χ^2:

$$\chi^2 = \sum_n \frac{[F(n) - Nf(n)]^2}{Nf(n)} \tag{36}$$

We expect that this sum will be order of ν. If it is appreciably *larger* than ν; i.e., if the observed frequencies differ from the predicted ones by an unexpectedly large amount, on the average, then we begin to suspect that the system we are observing does not in fact follow the ideal distribution we have predicted. If the ideal system is an unloaded die, for which $f(n) = \frac{1}{6}$, then a value of χ^2 much larger than 6 indicates that the die is loaded.

For a situation for which all events are equally probable, we have $f(n) = 1/\nu$. We also may use the fact that $\sum F(n) = N$. In this case we can simplify Eq. (36), obtaining

$$\chi^2 = N\left\{\nu \sum \left[\frac{F(n)}{N}\right]^2 - 1\right\} \tag{37}$$

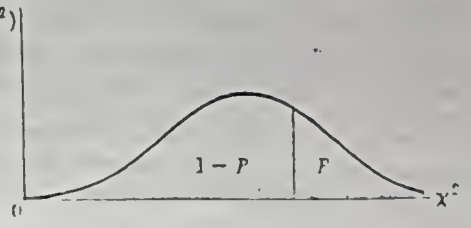
For example, for the data shown in Fig. 4 we have

$$\chi^2 = 10\{6(0.24) - 1\} = 4.4 \tag{38}$$

Since this is of the order ν, we may reasonably suppose that the observed deviations are not significant.

But how do we judge significance? Suppose we repeat the sequence of 10 tosses a large number of times, computing a value of chi-square for each set of 10 tosses. We may expect a normalized distribution for χ^2 something like that shown in Fig. 6. We may characterize a given value of χ^2 by the proba-

FIGURE 6



bility that it is exceeded in the distribution. This is just the percentage of the area under the curve for values of χ^2 which exceed the particular value. This is called the level of confidence P. A small confidence level means that the chance that the original distribution of events is strictly random is quite small. Thus, in our case a loaded die should have a large chi-square and a correspondingly small level of confidence. In Table 7 we give the values of χ^2 at various

TABLE 7

$\nu = 6$	
Confidence level, P (%)	χ^2
99	0.87[illegible]
98	1.13[illegible]
95	1.63[illegible]
90	2.20[illegible]
80	3.07[illegible]
20	8.55[illegible]
10	10.64[illegible]
5	12.59[illegible]
2	15.03[illegible]
1	16.81[illegible]
0.1	22.45[illegible]

confidence levels for six events. Then, for a value of chi-square of 4.4 we can be almost 80% certain that the distribution is random. This is not to say that deviations would not show up for larger N but simply to say that with 10 tosses the deviations are not significant.

Compute chi-square for 10 tosses of dice 1 and 2 and for 100 tosses. Which die do you think is loaded? What is your confidence level (that you are observing a statistical fluctuation)?

If you observe significant deviations from randomness for one of your dice, which face (or faces) do you think are loaded?

By taping a piece of thread in succession to each of three orthogonal faces, check your determinations.

questions

1 For an unloaded die the theoretical probabilities $f(n)$ must satisfy the relation

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = 1$$

Why? If the die is loaded, is this relation still satisfied? Explain.

2 Suppose a penny is flipped 100 times, and the result is 54 heads and 46 tails. What can you say about whether or not the penny is lopsided?

3 In view of the relation stated in Question 1, not all the six values of $f(n)$ are independent: if any five are known, the sixth may be computed. Does this suggest that in using the χ^2 test we should take $\nu = 5$ instead of $\nu = 6$? Explain.

4 When an ideal (symmetric) coin is flipped a large number of times, the ratio of heads to tails must approach the value unity. Does this also mean that the *difference* between number of heads and number of tails must approach zero? That is, might this difference grow larger and larger with the number of trials, and still give a ratio that approaches unity? Explain.

5 Could the χ^2 test, or some variation of it, be used to determine which side of a loaded die is the heavy side? Describe how this might be done.

experiment **MS-4**

probability distributions

introduction

We saw in Experiment MS-3 how notions of probability could be used in the analysis of a simple experimental measurement and, particularly, how such notions could be used in the *design* of experiments. In the remaining experiments in this unit we shall develop these notions somewhat more systematically.

We begin with probability considerations involved in various classical games of chance. These have very little to do directly with science; they do, however, have considerable intrinsic (and perhaps practical) interest, and in addition provide a useful framework for introducing basic ideas. We begin with the construction of a table of random numbers, which is then used in a variety of experiments.

In a list of one-digit random numbers, the numbers 0 through 9 appear with equal probability. This means that, for example, if we count the number of 7's in a very large list, the total number of 7's will be very nearly one-tenth of the total number of digits. As the total number increases, the ratio approaches one-tenth more and more closely. This, in fact, is precisely what we mean when we say that the *probability* of occurrence of a 7 is $\frac{1}{10}$. Similarly, in flipping a coin we say that the probability of "heads" is $\frac{1}{2}$, which means that in a very large number of flips the ratio of the number of heads to the total number of flips is $\frac{1}{2}$ (assuming the coin is not lopsided).

We shall generate a three-digit random-number table by using a set of three icosohedral (twenty-sided) dice. If the dice are symmetric and no attempt is made to manipulate them, the number on each die should be random. Later we will learn to test whether these numbers are truly random, using a technique similar to that used in Experiment MS-3. The random-number table can be used for experimental study of various probability distributions, and the results of the experiments can be compared with theoretical predictions.

In characterizing a set of numbers, especially when these numbers are associated with an experimental result such as a measurement or an examination score, several properties of the set are of interest. The most obvious one is the *arithmetic mean*, usually called simply the mean or average. The questions "What was the average on the exam? Was my score above or below average?" are heard in every classroom. To compute the mean we simply add all the numbers and divide by the total number of numbers. Formally, if we have N numbers denoted by $n_1, n_2, \ldots, n_N$, or a typical one by n_i, where $i = 1, 2, \ldots, N$, and if we denote the *mean* by $\bar{n}$, then its definition is

$$\bar{n} = \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} n_i \qquad (39)$$

Another interesting question, after the mean has been found, is how much the various numbers differ from the mean, on the average. If the average

exam score is 70 but most of the scores fall in the range between 65 and 75, the "spread" is not very great, but if they are sprinkled from 20 to 99, the spread is greater. Clearly, the significance of a score of 60 is different in the two cases. Thus we need a quantitative measure of this spread or *dispersion*, as it is usually called.

One possibility is to simply take the difference between each number and the mean and take the average of these differences. This gives rise to some difficulty, since some differences are positive and others negative. In fact, it is fairly easy to prove that the *average* of the differences is *always* zero. To circumvent this difficulty, we *square* each difference, obtaining numbers which are always positive. Then we average the squares by adding them and dividing by N, and finally take the square root. The result is sometimes called the "root-mean-square deviation," but the usual name is *standard deviation*. This measure of dispersion is usually denoted by σ. Translating the above word definition into symbols, we have

$$\sigma^2 = \frac{(n_1 - \bar{n})^2 + (n_2 - \bar{n})^2 + \cdots + (n_N - \bar{n})^2}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (n_i - \bar{n})^2 \qquad (40)$$

The square of the standard deviation σ^2 is often called the *variance*.

Often we need to distinguish between the mean and variance for a *particular* set of numbers and the mean and variance of a *hypothetical* very large set of numbers from which this particular set was taken. For example, suppose we roll one of the icosohedral dice a very large number of times, and average the resulting numbers. It is easy to see that if all the numbers are really equally likely, the average should be *exactly* 4.50. But if we roll only 36 times, the resulting average may differ somewhat from 4.50, and if we roll only 9 times the average is not likely to be very close to 4.50.

Thus, we distinguish between the *sample distribution*, the set of numbers obtained in a particular experiment, and the *parent distribution*, the hypothetical very large set of numbers from which the sample is taken. Similarly, we distinguish the *parent mean*, which in this case is exactly 4.50, from the *sample mean*, which is in general somewhat different. In most cases we expect that the sample mean will be very nearly equal to the parent mean if the sample is very large. Similarly, we can introduce the terms *sample variance* and *parent variance*.

experiment

Construct a 360-digit random-number table, using the three icosohedral dice, and recording results in Table 8. In reading the numbers from the dice, always read in the same order (e.g., red, yellow, blue). Why is this important? Is it possible to distinguish a random-number table generated three digits at a time from one generated only one digit at a time, as with only one die?

Enter in Table 9A the number of times each number (0 through 9) appears in the table, and from these counts calculate the *probability* of occurrence of each number. How do your results compare with the probabilities from the parent distribution?

Select from Table 8 a subset of 36 digits. It is best to take a sequence of

TABLE 8

K	S	M	K	S	M	K	S	M	K	S	M	K	S	M	K	S	M	K	S	M
3	3	8	0	8	2	7	1	0	1	4	9	6	2	4	5	4	2	1	4	6	8	6	1
1	8	4	1	2	3	1	9	7	6	5	0	5	1	2	1	2	1	7	4	6	1	1	2
6	4	6	0	4	9	2	0	5	6	6	2	2	2	0	4	8	0	4	3	5	6	6	8
8	8	6	0	2	3	1	7	0	3	5	8	9	9	0	6	6	2	2	5	0	1	5	7
3	2	2	3	4	0	5	3	3	1	4	7	8	3	0	4	9	7	5	5	3	3	3	1
4	6	3	2	3	8	4	5	6	4	4	4	6	7	0	0	5	8	4	6	2	0	3	6
4	2	9	1	6	7	5	0	9	1	1	1	2	0	6	2	8	3	7	7	1	0	3	7
7	6	2	4	9	6	0	7	4	6	0	4	1	2	6	3	2	7	3	3	5	2	1	0
5	1	5	9	1	8	6	6	1	7	2	5	5	4	7	6	8	4	0	3	3	1	8	3
2	3	5	0	1	9	8	0	7	2	1	6	6	3	6	7	6	9	3	2	0	0	5	4
3	1	8	0	0	1	1	1	2	7	5	1	3	4	0	6	4	3	3	4	3	3	5	3
1	6	0	5	8	5	3	1	5	7	7	0	5	0	8	3	5	0	3	8	2	2	1	1
0	3	0	6	9	6	0	9	8	8	4	6	8	8	5	4	3	4	1	5	2	8	5	3
2	0	2	1	1	6	1	7	0	9	9	9	1	6	3	1	9	4	4	4	9	3	4	3
6	0	2	2	1	8	1	5	2	1	4	2	6	0	5	6	5	2	2	2	1	5	4	5

consecutive digits, to avoid bias in their selection. Enter their frequencies and computed probabilities in Table 9B. Compute the sample *mean* and *variance*

TABLE 9A	Number	Frequency	Probability
	0		
	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
	7		
	8		
	9		

9B	Number	Frequency	Probability
	0		
	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
	7		
	8		
	9		

of these numbers. Compare your results with the parent mean and variance computed below. Also compute the mean and variance for the full Table 8 and compare with the parent values. The calculations are fairly simple if instead of working with individual numbers you use the *frequency* of occur-

rence of each number. For example, if the number n_i occurs F_i times in the sample, then the sample mean is given by

$$\bar{n} = \frac{n_1 F_1 + n_2 F_2 + \cdots}{F_1 + F_2 + \cdots} = \frac{\Sigma\, n_i F_i}{\Sigma\, F_i} \tag{41}$$

in which the sums involve only 10 terms instead of 36 or 360. Similarly, the sample *variance* is given by

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma\, F_i (n_i - \bar{n})^2}{\Sigma\, F_i} \tag{42}$$

We also note that in each case $\Sigma\, F_i$ is equal to the total number of digits N in the sample.

In the present case we expect for the *parent* distribution $F_i = N/10$ for all i. Then Eq. (41) gives

$$\bar{n} = \frac{\Sigma\, n_i}{10} = 4.5$$

and Eq. (42) gives

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma\, (n_i - \bar{n})^2}{10} = \frac{\Sigma\, n_i^2}{10} - \bar{n}^2 = 28.50 - 20.25 = 8.25 \tag{43}$$

It would not be surprising if for a limited sample of 36 or 120 entries we find that the mean is not exactly 4.50. We should expect, however, that the agreement improves with larger sample sizes. Try to make an intuitive judgment as to whether your results are reasonable, and note whether or not agreement improves with sample size. Just what constitutes a reasonable deviation will be discussed in Experiment 5.

PAIRS OF DIGITS

Now select 100 *pairs* of digits. This is done simply by taking the first two digits from the left in each of a series of three-digit groups. Now take the *sum* of each pair, to obtain 100 numbers in the range between 0 and 18. Note that the sums of digits are not equally probable because most of them can occur in several different ways. Table 10 shows in incomplete form the various ways in which each of the sums can occur, and the corresponding probabilities. Complete this table. Do the probabilities add up to unity?

Enter in Table 11 the frequency with which each value between 0 and 18 occurs in your 100-pair sample. Divide by the number of pairs to obtain the sample probability and compare with the parent values as given in Table 10. Compute the mean for your sample and compare with the parent value of 9.00. You may wish also to compute the variance for your sample and compare it with the parent value of 16.50. Note that the computed variance for the sum of two digits is just twice the variance for a single digit. Why?

questions

1 When a weather forecaster says that the chance of rain is 1 in 10, what does he mean? In what sense is this situation a statistical one?

2 Among 5 random digits (each between 0 and 9) what is the probability that *all* are 7's? That *none* is a 7? That exactly one is a 7?

TABLE 10

Sum						Probability
0	00					1/100 = 0.01
1	01	10				2/100 = 0.02
2	02	11	20			3/100 = 0.03
3	03	12	21	30		4/100 = 0.04
4	04	13	22	31	40	5/100 = 0.05
5						
6						
7						
8						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16	79	88	97			3/100 = 0.03
17	89	98				2/100 = 0.02
18	99					1/100 = 0.01

3 Prove that for any set of N numbers, the *average* of the deviations from the mean is equal to zero.

4 What are some possible sources of bias in your random-number table which would make it not truly random?

5 For any set of N numbers n_i, prove that the variance is given by $\sigma^2 = \langle n^2 \rangle_{av} - (\bar{n})^2$, where $\langle n^2 \rangle_{av}$ denotes the average of n_i^2.

6 Show that the variance of the sum of p numbers n_i is just p times the variance of a single number n_i. Note that whereas the mean is proportional to p, the standard deviation increases only as the square root of p. Thus, the more digits in the sum, the narrower the distribution is as compared with the mean

TABLE 11

Number	Frequency	Probability	Number	Frequency	Probability
0			10		
1			11		
2			12		
3			13		
4			14		
5			15		
6			16		
7			17		
8			18		
9					

7 In Table 10, show that the probabilities add up to unity, without actually adding them. *Hint*: The sum of the first N integers is $\frac{1}{2}N(N+1)$.

8 Derive the values given for the parent mean and variance for the distribution of sums of two random digits.

9 Suppose a table of random *octal-base* digits is constructed by rolling one or more octahedral dice. Find the mean and variance for the distribution of digits, and for the distribution of sums of two digits.

Zar 1 ve zar 2 için 10 ve 100 atıştaki ki-kareleri hesaplayın. Hangi zar yüklenmiş olduğunu düşünüyorsunuz? Güvenirlik düzeyiniz nedir (ada istatistiksel bir dalgalanma gözlüyorsunuz)?

Zarlarınızın birisi için gelişi güzellikten önemli derecede sapmalar [illegible]niz, hangi yüzeyin (veya yüzeylerin) yüklü olmasını beklersiniz? [illegible]k parçasını zarın üç dik yüzeyine yapıştırarak asın ve bekleyişin [illegible]ğunu sınayın.

SORULAR

Yüklenmemiş bir zar için kuramsal f(n) olasılıkları

$$\sum_{n=1}^{6} f(n) = 1$$

bağıntısını sağlamalıdır. Neden? Zar yüklenmiş ise bu bağıntı yine doğru mudur?

Bir paranın 100 defa havaya fırlatıldığını ve sonucun 54 yazı 46 tura geldiğini kabul edin. Paranın bir yana eğilimli oluşu konusunda ne söyleyebilirsiniz?

Soru 1'de yazılan bağıntıya göre f(n)'nin 6 değerinin hepsi de bağımsız değildir; herhangi beşi bilinirse altıncısı hesaplanabilir. Bu χ^2 sınamasını $\nu = 6$ yerine $\nu = 5$ alacağımızı mı söylüyor? Açıklayın.

Kusursuz (simetrik) bir madeni para bir çok defalar atılırsa yazıların turalara oranı bire yaklaşmalıdır. Bu ayrıca yazı ve tura sayısı [illegible]sındaki farkın sıfıra yaklaşacağı anlamına gelir mi? Yani fark, de[illegible]e sayısı ile birlikte çok büyük değerlere ulaşırken oran yine de [illegible]re yaklaşabilir mi? Açıklayın.

[illegible] sınaması, veya bunun değiştirilmiş bir şekli, yüklü bir zarın hangi [illegible]'nın ağır olduğunu bulmada kullanılabilir mi? Bunun nasıl yapılabileceğini anlatın.

Deney **EA - 4**

Olasılık Dağılımı

GİRİŞ

Deney MI-3'de olasılık kavramlarının basit deneysel bir ölçmenin çözümlenmesinde nasıl kullanılabileceğini; özellikle bu gibi kavramların deneylerin tasarlanmasında nasıl kullanılabileceğini gördük. Bu bölümdeki geri kalan deneylerde bu bilgileri daha düzenli biçimde geliştireceğiz.

Bilinen bazı şans oyunlarında görülen olasılık düşünceleri ile işe başlayacağız. Bunların bilimle doğrudan ilişkileri çok az da olsa çok dikkate değer yönleri vardır ve ayrıca temel düşüncelerin sunulması bakımından kullanışlı bir çerçeve oluştururlar. Şimdi çeşitli deneylerde kullanılacak bir gelişigüzel sayılar çizelgesi düzenlemekle işe başlıyalım.

Bir rakamlı bir gelişigüzel sayılar çizelgesinde 0'dan 9'a kadar olan sayılar ayni olasılıkla ortaya çıkarlar. Örneğin çok büyük bir listedeki 7'leri sayarsak toplam sayı toplam rakam sayısının yaklaşıkça onda biri olacaktır. Toplam sayı büyüdükçe oran onda bire daha da yaklaşır. Bir 7 çıkmasının olasılığı 1/10'dur dediğimiz zaman anlatmak istediğimiz şey budur. Ayni şekilde para attığımız zaman yazı gelme olasılığı 1/2'dir demekle, çok sayıda atışta yazı sayısının toplam atış sayısına oranı 1/2 olduğunu anlatıyoruz (paranın bir yana eğilim göstermediği kabul ediliyor.)

Üç tane 20 yüzlü zar kullanarak üç basamaklı bir sayı çizelgesi kuracağız. Zarlar simetrik yani hilesiz ise her zar üzerindeki sayı gelişigüzel olmalıdır. İlerde, Deney MI-3'dekine benzer bir teknik kullanarak bu sayıların gelişigüzel olup olmadığını nasıl anlıyacağımızı göreceğiz. Gelişigüzel sayı çizelgesi çeşitli olasılık dağılımlarının deneysel olarak incelenmesinde ve deney sonuçlarını kuramsal bekleyişlerimizle karşılaştırılmasında kullanılabilir.

Bir sayı kümesini belirginleştirirken, özellikle bu sayılar deneysel bir ölçü veya bir sınav sonucu ile ilgili ise, bu sayılar tümcesinin bazı ilginç özellikleri vardır. Bu özellikerin en belirlisi genellikle ortalama de-

ğer veya kısaca ortalama denen **aritmetik ortalamadır**."Sınavdaki ortalama neydi? Aldığım not ortalamanın altında mı, üstünde miydi?" Soruları her sınıfta işitilir. Ortalamayı bulmak için sadece bütün puanlar toplanıp toplam öğrenci sayısına bölünür. Şekilce $n_1, n_2, \ldots, n_N$ veya bir örneği n_i $(i = 1,2,\ldots N)$ ile gösterilen N tane sayımız varsa, ve ortalama değeri $\bar{n}$ ile gösterirsek, tanımca

$$\bar{n} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i \qquad (39)$$

olacaktır. Ortalama değer bulunduktan sonra ilginç başka bir soru çeşitli sayıların ortalama değerden ortalama olarak ne kadar farketmiğidir. Eğer sınavın ortalama sonucu 70 ve sonuçların çoğu 65 ile 75 arasında ise "serpilme" çok fazla değil, fakat 20'den 99'a kadar gitmişlerse serpilme daha büyüktür. Açık olarak 60 puanının iki durumdaki yeri farklıdır. O halde bu dağılmayı nicel olarak ölçebilmemiz gerekiyor. Bu dağılmaya denel olarak serpilme veya dağılım (Dispersiyon) denir.

Dağılmayı bulmak için şu yapılabilir: Her sayı ile ortalama arasındaki fark ve bu farkların ortalaması alınabilir. Bazı farklar pozitif ötekiler negatif olduğu için bir takım güçlükler ortaya çıkar. Gerçekten farklar ortalamasının sıfır olduğunu doğrulamak kolaydır. Bu güçlüğü ortadan kaldırmak için her farkın **karesini** alarak pozitif sayılar elde ederiz. Kareleri toplayıp N'ye bölerek ortalamayı bulur ve sonra da kare kökünü alırız. Sonuca bazan "kare ortalama kare kökü" veya "kök sapması" denir; fakat asıl adı **standart sapmadır**. Bu şekilde ölçülen dağılma genellikle σ ile gösterilir. Yukarda sözle verilen tanımı şöyle gösterebiliriz:

$$\sigma^2 = \frac{(n_1-\bar{n})^2 + (n_2-\bar{n})^2 + \ldots + (n_N-\bar{n})^2}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (n_i-\bar{n})^2 \qquad (40)$$

Standart sapmanın karesi olan σ^2 büyüklüğüne genellikle **variyans** denir.

Çoğu kez özel bir sayı tümcesinin ortalaması ve variansı ile bu sayıların seçildiği ve önceden varolduğu kabul edilen bir sayılar tümcesinin ortalaması ve variansını ayırdetmemiz gerekir. Örneğin yirmi yüzlü zarlardan birini düşünün. Bütün sayılar aynı olasılıkla çıkıyorsa ortalamanın tam 4,50 olması gerektiği kolaylıkla görülebilir. Eğer zarı 36 kez atarsak elde edilen sonuç 4,50'tan biraz farklı olabilir ve eğer 9 defa atarsak ortalamanın 4,50'a yakın olması söz konusu olamaz.

Belli bir deneyde elde edilmiş sayılar tümcesi olan bir örnek dağılım

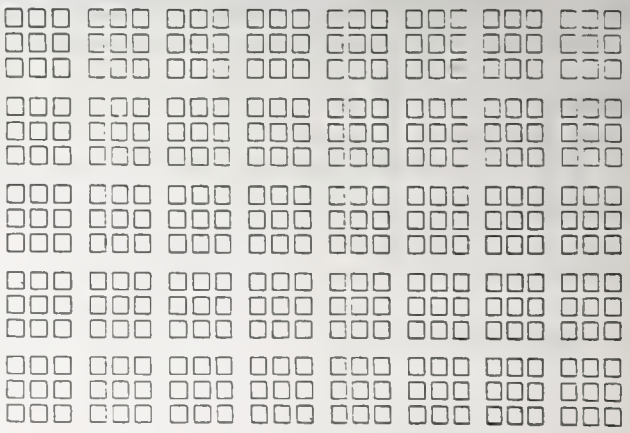
ile bu dağılımın alınmış olduğu çok sayıdan oluşmuş **ana dağılımı** birbirinden ayırdedeceğiz. Aynı şekilde, bu örnekte 4,50 olan **ana ortalama** ile genellikle biraz farklı olan **örnek ortalamayı** da birbirinden ayıracağız. Çoğu kez örnek dağılımın büyük olması halinde ana dağılıma çok yakın olmasını bekleriz. Benzer şekilde **örnek varians** ve **ana varians** gibi terimler de ortaya atabiliriz.

DENEY

Yirmi yüzlü üç zardan elde edeceğimiz sayıları Çizelge 8'e geçirerek 360 rakamlı bir gelişigüzel sayılar çizelgesi kurun. Zarlardan sayıları okurken hep aynı sırayı izleyin (örneğin kırmızı, sarı, mavi). Bu kural neden önemlidir? Üç zarla bir tek atışta üç sayı elde ederek kurulmuş bir sayı çizelgesini, bir atışta bir sayı elde ederek kurulan çizelgeden ayırdedebilir miyiz?

Her sayının (0'dan 9'a) çizelgede kaç kez tekrarlandığını Çizelge 9A'ya geçirin ve bu saymalardan her sayının tekrarlanma olasılığını hesaplayın. Sonuçlarınız ana dağılımdaki olasılıklarla ne kadar uyuşuyor?

ÇİZELGE 8



4.86

4.16

23.6196 × 3
14.8996 × 2
8.1796 × 3
3.4596 × 3
0.7396 × 5
0.0196 × 5
1.2996 × 4
4.5796 × 3
9.8596 × 4
17.1796 × 4

6 − 4

16·37 + 9 × 35 + 4 × 70 + 40 + 0 + 32 + 4·34 + 9 × 41 + 16 × 45 + 25 × 36

Çizelge 8'den 36 sayılık bir alt grup seçin. Bir yeğlemeyi önlemek için ...da bir sayı dizisi seçmek faydalıdır. Bu sayıların frekanslarını ve ...lanan olasılıklarını çizelge 9B'ye kaydedin. Bu sayı örneğinin orta...sını ve varlansını hesaplayın. Sonuçlarınızı aşağıda hesaplanan ana

...LGE 9A

Frekans	Olasılık

9B

Sayı	Frekans	Olasılık
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

...ama ile ve variansla karşılaştırın. Ayrıca Çizelge 8'in tümü için or...ayı ve varians hesaplayarak ana değerlerle karşılaştırın. Ayrı ayrı ...arla uğraşacak yerde her sayının çıkış frekansını kullanırsanız he... kolaylaşır. Örneğin, n_i sayısı örnek içinde F_i kez çıkmış ise örnek ...ması

$$\bar{n} = \frac{n_1F_1 + n_2F_2 + \dots}{F_1 + F_2 + \dots} = \frac{\Sigma\, n_iF_i}{\Sigma\, F_i} \qquad (41)$$

...rilir; toplamlarda 36 veya 360 yerine sadece 10 terim alınmıştır. ...erince örnek varians

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma\, F_i(n_i - \bar{n})^2}{\Sigma\, F_i} \qquad (42)$$

Şunu da belirtelim ki, her iki durumda ΣF_i örnekteki rakam sayısı ...mı olan N'ye eşittir.

Bu halde ana dağılımdaki bütün i'ler için $F_i = N/10$ bekleriz. O za... Denk (41)

$$\bar{n} = \Sigma n_i/10 = 4{,}5$$

ve Denk. (42)'de

$$\sigma^2 = \Sigma(n_i - \bar{n})^2/10 = \frac{\Sigma\, n_i^2}{10} - \bar{n}^2 = 28{,}50 - 20{,}25 = 8{,}25 \qquad (43)$$

verir. 36 veya 120 girişle sınırlı bir örnekte ortalamayı tam 4,5 bulamazsak bize pek şaşırtıcı gelmemeli. Buna karşın daha büyük örnekler için kabulümüzün doğru çıkacağını beklemek gerekir. Sonuçlarınızın akla yakın olup olmadığına sezişle karar verin. Ayrıca örnek büyüklüğüne bakarak uyuşmanın düzelip düzelmediğine dikkat edin. Neyin uygun bir sapma sağladığı Deney 5'de ele alınarak tartışılacak.

RAKAM ÇİFTLERİ

Şimdi 100 rakam çifti seçin. Bu basitçe her üç rakamlı gruplar serisinde soldaki ilk iki rakamını almakla yapılır. Her çiftin toplamını alarak değeri 0 ile 18 arasında 100 sayı elde edin. Bu rakamların toplamlarının çıkış olasılığı aynı değildir. Çünkü bunların çoğu değişik birkaç şekilde meydana gelebilir. Çizelge 10 her toplamın çıkabileceği çeşitli yolları ve bunlara gelen olasılıkları tam olarak vermektedir. Bu çizelgeyi tamamlayın. Olasılıklar toplamı bire eşit oluyor mu?

Seçtiğiniz 100 çiftli örnekte 0 ile 18 arasındaki her sayının çıkış frekansını Çizelge 11'e alın. Toplam çift sayısına bölerek örnek olasılığını hesaplayın Çizelge 10'da verilen ana değerlerle karşılaştırınız. Örneğinizin ortalama değerini hesaplayın ve bunu ana değer olan 9 sayısı ile karşılaştırın. Örneğinizin variansını hesaplayıp 16,50 ana değeri ile karşılaştırabilirsiniz. İki rakamlı-sayıların toplamı ile ilgili variansın bir rakamlı sayıların variansının iki katına eşit olduğuna dikkatinizi çekelim.

SORULAR

1. Hava raporundaki yağmur olasılığı onda birdir denirse ne demek isteniyor? Bu durum hangi anlamda istatikseldir?
2. Her biri 0 ile 9 arasında gelişigüzel 5 sayıdan **hepsinin**, sadece **birinin** 7 olma olasılığı ile **hiçbirinin** 7 olmama olasılığı nedir?
3. N sayılık bir tümce için ortalama değerden sapmaların ortalamasının 0'a eşit olduğunu gösteriniz.
4. Gelişigüzel sayılar çizelgenizin tam anlamıyla gelişigüzel olmasını engelleyecek hata kaynakları nelerdir?
5. Herhangi N tane n_i sayılar tümcesi için variansın $\sigma^2 = (n^2)_{or} - (n)^2$ ile verildiğini gösteriniz. Burada $(n^2)_{or}$ simgesi n_i^2'nin ortalamasını gösterir.

ÇİZELGE 10

Toplam						Olasılık
0	00					1/100 = 0,01
1	01	10				2/100 = 0,02
2	02	11	20			3/100 = 0,03
3	03	12	21	30		4/100 = 0,04
4	04	13	22	31	40	5/100 = 0,05
5	05	14	41	23	32 50	6/100 = 0.06
6	06	42	24	33	51 16 60	7/100=0.07
7	07	52	25	43	34 61 16 70	8/100=0.08
8	08	44	53	35	62 26 71 17 80	9/100:0.09
9	09	54	45	63	36 72 27 81 18 90	10/100 = 0.1
10	55	91	19	82	28 73 37 64 46	9/100 = 0.09
11	56	65	83	38	92 29 47 74	8/100 = 0.08
12	66	75	57	84	48 93 39	7/100 = 0,07
13	67	76	94	49	85 58	6/100 = 0.06
14	77	59	95	86	68	5/100 = 0.05
15	78	87	96	69		4/100 = 0.04
16	79	88	97			3/100 = 0,03
17	89	98				2/100 = 0,02
18	99					1/100 = 0,01

p tane n_i sayısının toplamının variansının bir tek n_i sayısının varians defa p olduğunu gösteriniz. Ortalama değer p ile oranlı biçimde değişirken standart sapmanın sadece kare kök p ile azaldığına dikkat edin. Buna göre toplam içerisinde ne kadar çok rakam bulunursa ortalamaya göre olan dağılım o kadar dar olacaktır.

Çizelge 10'da olasılıklar toplamının 1 olduğunu toplam işlemi yapmadan gösteriniz. İpucu: İlk N tam sayısının toplamı $\frac{1}{2}N(N+1)$'dir.

Gelişigüzel iki rakam toplamlarının dağılımı için ana ortalama ve varians değerlerini türetiniz.

Sekiz tabanlı bir gelişigüzel sayılar çizelgesinin bir veya daha fazla sayıda sekiz yüzeyli zar atmakla elde edildiğini kabul edin. Rakamların dağılımı için ortalamayı ve variansı bulun, aynı şeyi iki rakamlı sayılar toplamlarının dağılımı için yapın.

ÇİZELGE 11

Sayı	Frekans	Olasılık	Sayı	Frekans	Olasılık
0			10		
1			11		
2			12		
3			13		
4			14		
5			15		
6			16		
7			17		
8			18		
9					

2×[illegible]9.9736	0
2×63.0436	1
3×48.1636	2
2×35.2836	3
6×24.4036	4
8×15.5236	5
8×8.6436	6
9×3.7636	7
10×0.8836	8
7×0.0036	9
12×1.1236	10
4 4.2436	11
8 9.3636	12
2 16.4836	13
5 25.6036	14
7 36.7236	15
349.8436	16
364.9636	17
0 82.0836	18

Deney **Mi - 5**

Binom Dağılımı

GİRİŞ

Bu deneyde binom dağılımı diye bilinen, çok yararlı özel bir olasılık dağılımını incelemek için gelişigüzel sayılar çizelgeniz ve bazı basit deney araçlarını kullanacaksınız.

Binom dağılımını tanıtmak amacıyla bazı para atma problemleri ile işe başlayalım. Simetrik bir para atıldığında bunun "yazı" gelmesi veya "tura" gelmesi olasılığı ½'dir (yani %50). Paranın diğer şekilde davranmayeceyiz ve her atış daha önceki tüm atışlardan bağımsızdır. Bu nedenle bir atıştan yazı çıkmışsa, bir yazı daha gelme olasılığı yine ½'dir; para bir önceki atışı hatırlamaz.

Bir sırada iki yazı gelme olasılığı nedir? Bu değişik bir sorudur. Bu olayın çıkması her birinin başarı olasılığı ½ olan bağımsız iki ayrı olayın oluşlarına bağlıdır. Bileşik olayın olasılığı ayrı olasılıkların çarpımına, veya 1/4'e eşittir. Bu sonucu değişik bir yoldan elde etmek için şuna dikkat etmek gerekir; para iki defa atılırsa eşit olasılıklı dört ayrı olay vardır:

YY YT TY TT

Bu dördünden yalnız bir tanesi istediğimiz olaydır, o halde olasılık 1/4'dür. Bir parayı ardısıra atacak yerde iki özdeş parayı aynı anda atarak da aynı sonucu elde edebiliriz. Zaman sırasının bir önemi yoktur.

Üç atış halinde, her atışın olabilir iki sonucu bulunduğu için olasılığı eşit olayların toplam sayısı 2^3 veya 8'dir. Bu olaylar şunlardır:

YYY YYT YTY YTT TYY TYT TTY TTT

Şu halde arka arkaya üç yazı elde etme olasılığı 1/8'dir. Gerçekten yukardaki olayların her biri için olasılık $(\frac{1}{2})^3$'tür. N atış halinde yazı ve turaların herhangi belli bir dizilişi için olasılık $(\frac{1}{2})^N$ olur.

Şimdi biraz daha değişik bir soru soralım. Üç atışta iki yazı gelme olasılığı nedir? Bu sonucu veren üç değişik diziliş vardır; YYT, YTY ve TYY. Her birinin olasılığı 1/8 olduğuna göre toplam olasılık 3/8'dir.

...şekilde üç atışta bir tek yazı gelme olasılığı da 3/8 ...ktır. Sıfır ile üç arasında herhangi bir yazı gelme olasılığı ...+ 3/8 + 3/8 + 1/8 = 1'dir. Böyle olması da pek şaşırtıcı olmasa ...

N atışta n yazı gelme olasılığı nedir? İlk önce, n yazıyla N - n tura ...herhangi özel bir dizilişi için olasılık $(\frac{1}{2})^N$'dir. Fakat n yazı kaç değişik düzenleme içinde gelebilir? Yani, her defasında N sayısının n tanesi ...rak yapılabilecek düzenleme kaç tanedir? Bu soruyu cevaplandırmak için her birinin ayrı bir düşme yeri olan N tane paramız bulunduğunu düşünmek yararlıdır. n tane yazıyı bu yerlere dağıtırken bunlardan ...risi için N tane yer seçmeye hakkımız var. Bu yerlerden her birine ...lık geri kalan N - 1 yeri ikinci yazıya, bunlardan her birisi için de ...yeri üçüncü yazıya vb. seçerek gider, sonunda n inci yazıyı geri ka...(N - n + 1) yerden birine yerleştiriniz. Buna göre N atış arasında n ...an toplam düzenlenim sayısı

$$N(N-1)(N-2)(N-3)\dots(N-n+1) \qquad (44)$$

...olacaktır. Fakat bu doğru değildir, çünkü aslında eşdeğer olan çok ...a düzenlenişi farklıymış gibi saydık. n yazıdan hangilerinin ayrı ...mlarda olduğu bizi ilgilendirmez; yazı yazıdır. O halde gerçek sayı...bulmak için bunu n yazının kendi aralarında düzenlenişlerin kaç şe...yeniden düzenlenebileceğini gösteren sayıya bölmemiz gerekmekte...Bunu hesaplamak için n sayının yeni baştan düzenlenişinde n tane ...lan herhangi birini önce, geri kalan n – 1 taneden herhangi birisini ...i olarak seçip sonuçta bir tek yazı kalıncaya kadar bu işleme devam ...leceğimize dikkat ediniz. n cismin böyle düzenlenme sayısına genel ...k n cismin yerdeğiştirme (permutasyon becayiş) sayısı denir, basit ...ekilde

$$n(n-1)(n-2)\dots(3)(2)(1) = n! \qquad (45)$$

...ktır. n! ifadesi "n faktöryel" diye okunur ve n'den başlayıp birer ...azalan bütün tam sayıların çarpımının kısaltılmışını gösterir. Ta...olarak 0! = 1'dir.

Demek ki N denemedeki n yazıyı çeşitli düzenler içinde sıralama sa...(buna genellikle her defasında n tanesi seçilen N cismin birleştirim ...binezon) sayısı denir.)

$$\frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1)}{n!} \qquad (46)$$

dir. Çoğu kez $\binom{N}{n}$ ile gösterilen bu ifadeye pay ve payda (N - n)! ile çarpılıp basitleştirilerek aşağıdaki şekle konabilir.

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!n!} \qquad (47)$$

Son olarak, $P_N(n)$ ile göstereceğiniz N atışta n yazı elde etme olasılığı

$$P_N(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^N \frac{N!}{(N-n)!n!} = \left(\frac{1}{2}\right)^N \binom{N}{n} \qquad (48)$$

olacaktır. Bunu sınamak için 3/8 olduğunu bildiğimiz 3 atışta iki yazı elde etme olasılığını hesaplayabiliriz. Bu durumda n = 2 ve N = 3'tür.

$$P_3(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3}{8}$$

O halde bulduğumuz ifade işliyor! Olağan başka durumları sınayabilirsiniz. Şimdi küçük bir genelleştirmeye gidelim. Para atışında bir tek yazı için olasılık ½ alınmıştı. Yine N bağımsız olayımız bulunsun, fakat her birinin kazanma olasılığı ½ değil, 0 ile 1 arasında bulunan başka bir p sayısı olsun. Buna göre N denemenin tam n tanesinin kazanma olasılığı ne olacaktır?

Bütün hesaplar basit bir değişiklikle daha önce yapılanlar gibidir. n kazanmanın özel bir şekilde düzenleniş olasılığını bulmamız ve bunu yine Denk. (47) ile verilen n kazancın N deneme arasından seçilme yolları sayısı ile çarpmamız gerekiyor. n kazanma ve N – n tane kaybetmenin özel bir düzenlenişi için olasılığı, p kazanma, q = 1 – p'de kaybetme olasılığı olmak üzere

$$p^n q^{N-n} = p^n (1-p)^{N-n} \qquad (49)$$

dir. Her denemede kazanma olasılığı p olduğuna göre N denemede tam n kez kazanma olasılığı

$$P_{N,p}(n) = p^n q^{N-n} \binom{N}{n} = p^n q^{N-n} \frac{N!}{(N-n)!n!} \qquad (50)$$

olacaktır. Dikkat edilirse para atma deneyinde p = q = ½ olduğu için bu ifade öncekine indirgenmektedir.

Genelleştirilmiş olasılık formülünün basit bir uygulaması olarak birkaç tane yirmi yüzlü zarın atıldığını düşünelim: Örneğin böyle 3 zarı at-

...mız zaman iki 7 elde etme olasılığı nedir? Her ayrı olay için p olasılı... , N = 3 ve n = 2'dir. Buna göre olasılık

$$P_{3,1/10}(2) = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(\frac{9}{10}\right)^{3-2} \frac{3!}{(3-2)!2!} = 0{,}027$$

...Denk (50) ile verilen olasılık dağılımına, binom açılımının katsayı... ile yakın ilişkisi nedeniyle **binom dağılımı** denir. Gerçekten,

$$(q+p)^N = \sum_{n=0}^{N} p^n q^{N-n} \binom{N}{n} = \binom{N}{0} q^N + \binom{N}{1} q^{N-1}p + \binom{N}{2} q^{N-2}p^2 + \ldots + \binom{N}{N} p^N \qquad (51)$$

...ğunu göstermek güç değildir. Buradan beklenildiği gibi hemen

$$\sum_{n=0}^{N} P_{N,p}(n) = 1 \qquad (52)$$

...ğunu görüyoruz. (Bunu neden bekledik?)

Binom dağılımında n'nin ortalama değeri ilgi çekicidir. Bir an için N ...e para atma problemi düşünülürse, yazıların ortalamasının veya orta... değerinin N deney sayısı ile her atışta yazı gelme olasılığının yani ...a çarpımına, başka deyimle $\frac{N}{2}$ 'ye eşit olduğu açıktır. Biraz daha ...çık olsa da p'nin $\frac{1}{2}$'ye eşit olmadığı halde de $\bar{n}$ ortalama değerinin

$$\bar{n} = Np \qquad (53)$$

...eşit olacağı akla yatkındır. Bunun doğru olduğu gösterilebilir; fakat ...takım hesap "oyun"ları gerektirdiğinden burada verilmeyecektir. ...zer oyunlarla* dağılımın "genişliğini" veren **dağılma** (varians) da ...aplanabilir. Bu ise

$$\sigma^2 = Npq \qquad (54)$$

...erilmektedir.

...SSON DAĞILIMI

N'nin büyük değerleri için büyük sayıların faktöriyelleri söz konusu ...ğundan binom dağılımı formülü kullanışsız hale gelir. Bu halde kul...

...alamanın ayrıntıları için bkz. H.D. Young - *Statistical Treatment of Experimental Data*, McGra... Book Company, New York, 1962.

lanılması çok daha kolay olan yaklaşık ifadelerin elde bulunması iyi bir rastlantıdır. Burada, N büyürken p'nin çok küçüldüğü ve böylece $\bar{n} = Np$ ortalama değerinin sonlu kaldığı hallerde geçerli olan ve **Poisson dağılımı**...a götüren yaklaşıklığını ele alacağız. N büyürken p'nin küçülmediği farklı bir yaklaşıklık Deney MI 6'da incelenecektir. Bu yaklaşıklığın vereceği dağılım **normal** veya **Gauss dağılımıdır.**

N'nin çok büyük ve p'nin çok küçük olduğu durumlarda geçerli olan yaklaşıklık aşağıdaki gibidir: Bu sınırda n'nin uygun olasılıklı değerleri ancak N'ye göre çok küçüktür. Önce,

$$\frac{N!}{(N-n)!} = N(N-1)\ldots(N-n+1) \qquad (55)$$

çarpanını düşünelim. Bu, N'den pek farklı olmayan n terimin çarpımıdır. Bu nedenle Denk. (55) ifadesinin yerine N^n alacağız. İkinci olarak q^{N-n} çarpanını

$$q^{N-n} = (1-p)^{N-n} \simeq \frac{(1-p)^N}{(1-p)^n} \qquad (56)$$

şeklinde yazalım. Burada payda hemen hemen bire eşittir, çünkü bire çok yakın bir sayının çok büyük olmayan bir kuvveti alınmıştır. Böylece aşağıdaki ifade elde edilir.

$$P_{N,p}(n) \simeq p^n(1-p)^N \frac{N^n}{n!} = \frac{(Np)^n(1-p)^N}{n!} \qquad (57)$$

N'yi yok etmek için $a = Np$ kısaltmasını yaparsak;

$$P_a(n) \simeq \frac{a^n(1-p)^{a/p}}{n!} = \frac{a^n}{n!}\left[(1-p)^{1/p}\right]^a \qquad (58)$$

olur. Geriye kalan iş aşağıdaki

$$\lim_{p\to 0} (1-p)^{1/p}$$

limitini hesaplamaktır: Bu limit bütün analiz giriş kitaplarında incelenmekte ve değerinin, e doğal logaritma tabanı olmak üzere $\frac{1}{e}$ 'ye eşit olduğu gösterilmektedir. Sonuçta **Poisson dağılımı** denen

$$P_a(n) = \frac{a^n e^{-a}}{n!} \qquad (59)$$

bağıntısını elde ederiz. Bu ifadede asıl binom dağılımının belirtgin N ve p sabitleri yerine bir tek a sabiti gelmektedir. Bu farkın nedeni bi...

...om dağılımının Np çarpımı sonlu kalacak şekilde $N \to \infty$'a ve $p \to 0$'a ...giderken limitini almış olmamızdır.

Poisson dağılımının elde ediliş şekline bakarak, olay sayısının çok büyük ve bir olayın kazanma olasılığının çok küçük olduğu, böylece $a = Np$ çarpımının sonlu kaldığı durumlara uyan dağılımın bu olduğu bilinmelidir. Poisson dağılımının en genel uygulama yerlerinden biri radyoaktivitenin anlatımıdır. Elimizde herbirinin belli bir zaman aralığında bozunma olasılığı 10^{-19} olan 10^{20} tane radyoaktif çekirdek bulunabilir. Bu zaman aralığındaki toplam parçalanma sayısı $N = 10^{20}$, $p = 10^{-19}$ ve $a = 10$ olmak üzere Poisson dağılımı gösterir. Poisson dağılımı için $\bar{n}$ ortalama değerini ve variansı, binom dağılımında bunlara uyan Denk. (53) ile (54)'de verilen niceliklerden dolaysız olarak kolaylıkla hesaplayabiliriz. q bire çok yakın olduğundan a parametresi cinsinden aşağıdaki basit sonuçları buluruz.

$$\bar{n} = a \qquad \sigma^2 = a \tag{60}$$

DENEY

Deney 4 için hazırlanan gelişigüzel sayılar çizelgesi binom ve Poisson dağılımları için ilginç örnekler verir. Yirmi yüzlü zar ile elde edilen üç-rakamlı gelişigüzel sayıları alarak her üç gruptaki 7'lerin sayısı için bir frekans sayımı yapın. Yani, üç rakamlı sayılardan kaç tanesinde hiç 7 yoktur; bir tane 7, iki 7 veya üç 7 kaç tanesinde var? Sonuçlarımızı ana binom dağılımına göre beklediklerimizle karşılaştırın. Örnek ortalamasını ve variansı hesaplayıp ana binom dağılımdaki değerlerle karşılaştırın.

Şimdi de gelişigüzel sayılar çizelgesindeki **dokuz rakamlı** grupları alalım. 9 rakamlı karesel grupların herbirindeki 7'lerin sayısı için frekans sayımı yapın; çizelgede böyle 40 grup bulunmaktadır. Sonuçlarınızı Çizelge 12'ye geçirin.

...tüm rakamların frekans sayımını elde etmek üzere bu sayımları öteki ...kamlar için de tekrarlayın ve frekansları her satıra yazın. Son olarak, ...sılıkları elde etmek için bunları toplam ölçme sayısına bölün. 40 kutu ... 10 rakam için toplam ölçme sayısı 400'dür.

Sonuçlarınızı $P_{N=10}$ (n) binom dağılımı değerleriyle karşılaştırın. Bu ...ğıntının değerlerini hesaplarken P(n + 1)'i P(n) cinsinden veren bir ...ri götürme (recurence) bağıntısı kullanmak fazla işlem yapmayı esir-

ÇİZELGE 12

Sayı	Frekans									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
0										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

ger. Binom dağılımı için uygun olan geri götürme bağıntısı Denk. (50) nin doğrudan uygulanmasıyla sınayabileceğimiz aşağıdaki bağıntıdır.

$$P_{N,p}(n+1) = \frac{p(N-n)}{q(n+1)} P_{N,p}(n) \tag{61}$$

Buna göre sadece $P_{N,p}(0)$'ı hesaplamak ve bu bağıntıyı kullanmak yeterlidir. Geri götürme bağıntısını kullanırken başta yapılan bir hata sürdüreceğinden genel olarak bu yol biraz sakıncalıdır. Bununla birlikte bu özel durumda artan n'ler için P'nin değerleri çok çabuk küçüldüğünden bir sakınca yoktur. Gerçekten, n >4 için değerlerin 10^{-5}'ten küçük olduğunu böylece daha ileri gitmenin anlamsızlığını görmelisiniz.

Şimdi 9 rakamlı gelişigüzel sayı gruplarındaki sayıların dağılımı için Poisson yaklaşıklığını ele alalım. N = 9, p = 1/10 olup a = Np = 0,9' dur. Poisson dağılımını kullanarak n'nin 0'dan 4'e kadar olan değerleri için olasılıkları yeniden hesaplayın. Hiç kuşkusuz N = 9, N = ∞'dan çok uzak olduğundan kesin bir uyuşma beklememeliyiz, fakat yine de karşılaştırma ilgi çekicidir. Binom dağılımı n = 0 ve n = 1 için (N ve p'nin özel değerlerinin sonucu olarak) aynı değerler verirken Poisson dağılımının P(0) ve P(1) için bunlardan sıra ile % 5 daha büyük ve daha küçük değerler verdiğine özellikle dikkat edin. Daha büyük n'ler için yaklaşıklığın doğruluğu artıyor mu, yoksa azalıyor mu?

11.000TL

Deney Mİ - 3
Yüklenmiş Zar

GIRIŞ

Bu bölümün son dört deneyi olasılık ve istatistik ile ilgilidir. Bölümün girişinde belirtildiği gibi istatistiğin fizikte önemli oluşunun iki temel nedeni var: Biri gelişigüzel ve önceden beklenmiyen deneysel hataları içine alan fiziksel ölçmelerin çözümlenmesi ile ilgilidir. Öteki ise bir gaz gibi, çok sayıda molekül içeren fiziksel sistemleri nistatistiksel ve kuantum mekaniksel anlatımı ve temelden istatistiksel olan radyoaktif bozunum gibi olaylar ile ilgilidir.

Bu deney basit fiziksel bir-sistem hakkında bazı sorular ortaya atmaktadır. Bu sorular-temel fizikle doğrudan ilgili olmasa da kılgın (pratik) bakımdan ilginçtir. Ortaya attığımız soruların hepsini tümcek yanıtlıyacağız ve yanıtların bazıları kesin değil sezişe bağlı olacak. Bu başlangıç yine de geri kalan deneylerde izlenecek yolu gösterecek.

Bu deneyde özdeş iki zarımız var; birinin bir yüzüne küçük kurşun parçalar eklenerek yüklenmiş, öteki ise yüklenmemiştir. Sorun hangi zarın ve hangi yüzünün yüklenmiş olduğunu bulmakdır. Bir fizikçiye böyle bir problem sunulduğu zaman çözüm için değişik yollar teklif edebilir. Bir çözüm yolu şu olabilir; zarla aynı yoğunlukta olan bir sıvı bularak zarı sıvıya daldırmak ve zarın bir yüzeyinin hep yukarı dönüp dönmediğine dikkat etmektir. Bir de zar kendinden daha az yoğun olan ağdalı bir sıvı içinde düşmeye bırakılabilir. Daha az doğru başka bir yol da zarı bir kaç değişik şekilde bağlayıp asarak kütle merkezini bulmak olabilir.

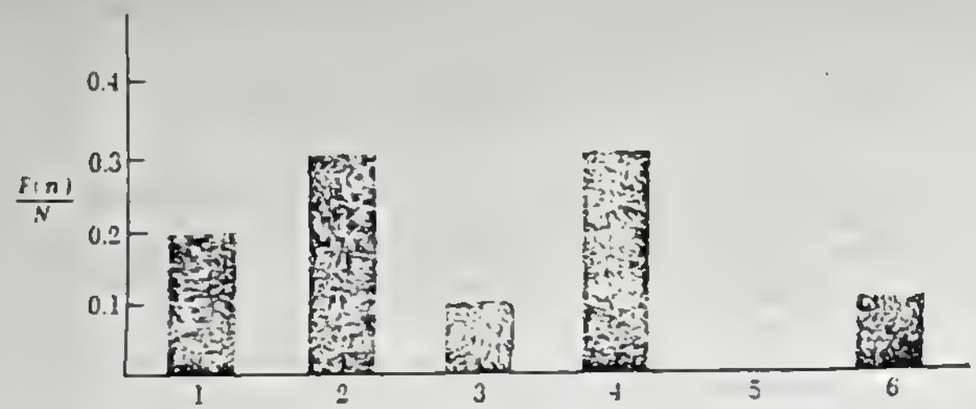
Bu deneyde bir fizikçi için olağan yöntemlerin en kötüsü gibi görünebilecek olan kumarcı yöntemi sunuyoruz. Yapacağımız iş durmadan zar atmak ve her defasında hangi yüzün üste geldiğini kaydetmektir. Bu yöntemin kötü yanı büyük hatalar verebileceğidir. Hangi yüzün üstte olacağı zarın bırakıldığı andaki durumuna edindiği spin miktarına, arka tahtaya ve masaya nasıl çarptığına ve aynı zamanda nasıl yüklenmiş olduğuna bağlıdır. Buna karşın bütün bu etkenlerin akla uygun bir şekilde gelişigüzel olduğunu kabul ederek ve zarı çok sayıda atarak, yüklü olup olmadığını ve ne şekilde yüklenmiş olduğunu anlamayı bekleyebiliriz.

Çok daha zor bir soru da şudur: Zarın özel şekilde yüklü olup olmadığına nasıl güvenebiliriz? Bu deneyin çözümlenmesinde bu gibi problemlerin istatistiksel olarak incelenmesinin sonuçlarını doğrudan sözkonusu edeceğiz. İlerki deneylerde bu deney için gerekli teoriyi geliştireceğiz. Fakat önce gerçek bir deney yapmayı daha ilginç bulabilirsiniz!

DENEY

Elinizde 1 ve 2 numaralı iki oyun zarınız, N de belli bir deney süresince atılış sayısı olsun; n üste gelen yüzeyi göstersin. Demek ki, n, 1'den 6'ya kadar bir sayıdır. Her bir sayının kaç defa çıktığı F(n) ile gösterilir ve buna çıkış frekans denir. öylece verilmiş bir deneyde 1 sayısı 7 kez, 2 sayısı 5 kez, v.b. çıkmış ise F(1) = 5 vb. olur.

ŞEKİL 4



Her zarı 10 kez (N = 10) atınız ve her zar için her yüzeyin üste geldiği frekansı kaydedin. Her frekans için F(n)/N'yi hesaplayıp bu yüzeyin olasılığını yaklaşık olarak bulun; verilerin çizelgesini Şek. 4'te verildiği gibi çizin.

Şimdi bunu f(n) ile göstereceğimiz teorik olasılık ile karşılaştırabiliriz. f(n) olarak ne beklemeliyiz? Yüklenmemiş bir zar için 6 yüzeye eşit olasılıkta 6 olay vardır. Şu halde f(n) = 1/6 = 0,1666... olması beklenebilir. Bu değerden sapmalar gözlenirse ya N çok küçüktür ve gelişigüzel dalgalanmalar göze çarpacak ölçüyü bulur veya yüzeyler arasında sistemli bir fark vardır (zar yüklüdür). Buradaki istatistiksel problem, verilerin çözümlenmesi ile f(n) = 1/6'dan gözlenen sapmaların önemli olup olmadığının belirlenmesidir.

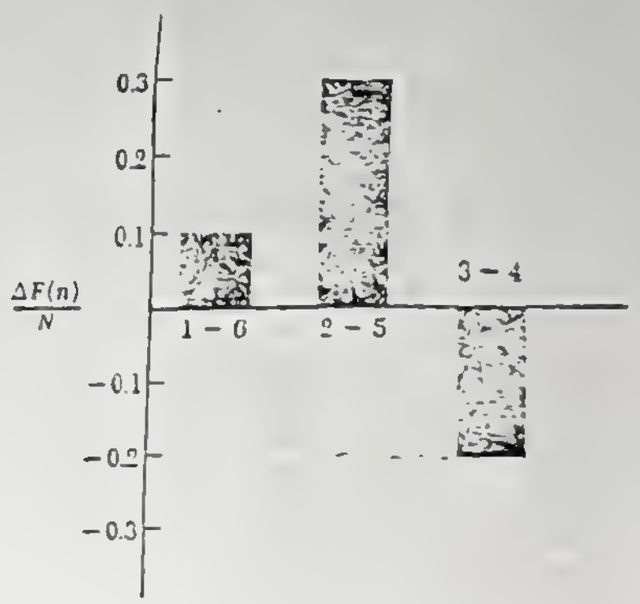
Fizikçe şunu ekleyebiliriz: Belli bir yüzey gelişigüzel bir frekansla değil de daha sık üste geliyorsa, zar bunu altta kalan yüzeyin zararına yapıyor demektir. Bu yüzden karşı yüzeylerin çıkma olasılıklarındaki farkları bakmayı düşünebiliriz. Bu anlamda Şek. 4 çizimini Şek. 5'te yeniden çiziyoruz. Elde ettiğiniz bilgilerden hangi zarın ve hangi yüzünün yüklü olduğunu kestirebilir misiniz? Deneysel olarak kestirin.

Her zarı 100 kez atarak frekansları kaydedin. Şek. 4 ve 5'deki gibi yeni olasılık grafikleri çizin. Şimdi hangi zar yüklü olabilir? Zarın hangi yüzü yüklüdür? İlk yapıtınız doğru mu idi? Yanılmış olmanız olağandır.

Şimdi aşağıdaki soruları sorabiliriz:

1. Yaptığınız ilk 10 atışlık deney sonunda verilere göre yargınıza ne kadar güvenebilirsiniz?
2. 100 atışlık sonuca ne kadar güvenebilirsiniz?
3. Elde ettiğiniz bilginin yeterli olabilmesi için kaç atış yapmanız gerekiyor? Bunu bilmek şüphesiz çok faydalıdır, çünkü ağır yüzü % 95 kesinlikle belirlebilirseniz atışa devam etmenin çok az önemi olabilir?

ŞEKİL 5



İ KARE SINAMASI

N gözlem yaparsak her birinin ν (nü) olabilir sonucu varsa (bir zar için ν = 6) verilen belli bir olayın gözlenen F(n) ile kuramsal olarak kestirilen Nf(n) frekansı arasındaki olağan sapmayı kestirebiliriz. 60 denemeden sonra, verilen bir n için frekans beklenen 10 sayısı yerine 12

iriz; 600 deney için de 100 yerine 94 bulabiliriz. Burada önemli şudur; N deneme sayısı büyüdükçe beklenen ve gözlenen frekanssındaki fark beklenen frekansın kendisi ile aynı hızla artmaz. te, bu farkın ortalama olarak beklenen frekansın kare köküyle olarak artığına inanmak gerekir. Bu sonucu ince ayrıntılariyle yacak durumunda henüz değiliz; şimdilik bunu böyle kabul edeeki deneylerde daha köklü olarak araştıracağız.
kardaki ifadeye göre,

$$\frac{F(n)-Nf(n)}{[Nf(n)]^{1/2}}$$

verilen her n için 1 basamağında olmalıdır. Elde edilebilecek nerkleri ortadan kaldırmak için yukarıki ifadenin karesini alırız: da n'nin farklı ν değeri için bu terimleri toplarız (zar için yine r). Sonuç genellikle χ^2 ile gösterilir:

$$\chi^2 = \sum_n \frac{[F(n)-Nf(n)]^2}{Nf(n)} \qquad (36)$$

amın ν basamağında olmasını bekleriz; ν'den yeterince büyükse, bir deyimle gözlenen frekanslar ile tahmin edilen frekanslar arasınlama olarak beklenmedik büyük farklar varsa, o zaman gözlediğumuz sistemin beklediğimiz kusursuz dağılıma uyduğundan n kuşku duymağa başlarız. Kusursuz sistem yüklenmemiş bir zar an için f(n)= 1/6'dır. ve χ^2'nin 6'dan büyük bir değeri zarın yükiduğunu gösterir.

n olayların eşit olasılığı durumu için $f(n) = \frac{1}{\nu}$ 'dür. Ayrıca

- N olgusundan da yararlanabiliriz. Bu durumda Denk. (36)'yı tirerek

$$\chi^2 = N\left\{\nu \sum \left[F(n)/N\right]^2 - 1\right\} \qquad (37)$$

riz.

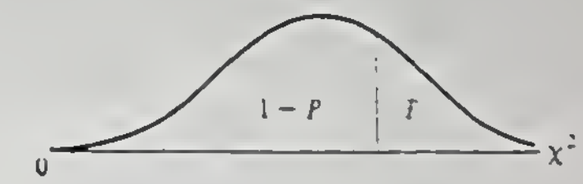
eğin, Şek. 4'de gösterilen veriler için

$$\chi^2 = 10\{6(0,24)-1\} = 4,4 \qquad (38)$$

ν basamağında olduğuna göre gözlenen sapmaların önemli olkabul edebiliriz.

Fakat önemli olup olmadığına nasıl karar veriyoruz? Her bir 10 atışlık dizi için χ^2 değerini hesaplayarak bu 10 atışlık diziyi büyük sayıda tekrarladığımızı kabul edelim. χ^2 için Şek. 6'daki gibi normalleştirilmiş bir dağılım bekleyebiliriz. Verilen χ^2 değeri, dağılımda daha büyük değer alma olasılığı ile belirginleşir. Bu, belli bir değeri aşan χ^2 değerlerine raslayacak eğrinin altında kalan alan yüzdesidir. Buna P güvenirlik düzeyi denir. Küçük bir güvenirlik düzeyi, olayların dağılımının gelişigüzel olma olasılığının çok küçük olduğunu anlatır. Şu halde incelediğimiz durumda yüklü bir zarın büyük bir ki-karesi olacak ve bunu tutan güvenirlik düzeyinin de küçük olması gerekecektir. Çizelge 7'de χ^2'nin 6 olay için değişik güvenirlik düzeylerindeki değerlerini veriyoruz.

ŞEKİL 6



ÇİZELGE 7

Güvenirlik düzeyi (%) P ν = 6	χ^2
99	0,872
98	1,134
95	1,635
90	2,204
80	3,070
20	8,558
10	10,645
5	12,592
2	15,033
1	16,812
0,1	22,452

o halde χ^2'nin 4,4 değeri için dağılımın gelişigüzel olduğuna hemen hemen % 80 güvenebiliriz. Bu, daha büyük N için sapmalar görülmiyecek demek değildir. Sadece 10 atış için sapmaların önemli olmadığını söylüyor.

1 ve 2 zarlarının 10 atısı için chi-kare yi hesapla.
1 " 2 " 100 " " " " "
Since hangi bir yöntemdir.
What is your confidence level that you are observing a
statistical fluctuation

If you observe little bit deeper deviation from randomness for
1 of your dice hangi yüz (yan da) yatar since yüzlü.
By taping a piece of thread in succession to each
of 3 orthogonal faces check yer determination

1) yüklenmemiş bir zar için teorik olasılık $\int(n) \sum_{n=1}^{6} f(n) - 1^{2}$
saçılımdır.
Neden? Bu bir yüklü ise zar saçılımını açıklayamaz

2) Bir para 100 kez atılıyor. 54 yazı, 54 tura geliyor
Ne söylesek bir sihir. Hileli midir.

3) 1. sınıf bales accusation not all the 6 values of in.
are beginning. If any 5 are known 6. may be carry
Does this suggest that in using the t test we should
take V-5 (yerine → V-6 ?) Akilla

4)

$\bar{n} \mp 2\sigma$ aralığı için

$$P(\bar{n} \mp \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\bar{n}-2\sigma}^{\bar{n}+2\sigma} e^{-(n-\bar{n})^2/2\sigma^2}$$

$$\frac{n-\bar{n}}{\sigma} = t \qquad \frac{dn}{\sigma} dt \Rightarrow dn = \sigma\, dt$$

$$\frac{\int e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \qquad t = \frac{\bar{n} - 2\sigma - \bar{n}}{\sigma} = -2$$

$$t = \frac{\bar{n} + 2\sigma - \bar{n}}{\sigma} = 2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{2} e^{-t^2/2} dt$$ Buna dayanarak

$\bar{n} \mp 2\sigma$ aralığında %95 olarak bulunur.

$\bar{n} = 36 \quad \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{360 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10}} \simeq 6$ olur

$$t = \frac{\bar{n} - 2\sigma - \bar{n}}{\sigma} = -2 \qquad t = \frac{\bar{n} + 3\sigma - \bar{n}}{\sigma} = -$$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{3} \frac{e^{-t^2/2}}{} dt$ ise %99 olur.

Dolayısıyla sezilen 3 soyunu $\bar{n} + \sigma = 36 + 6 = 42$ ve $\bar{n} - \sigma = 36 - 6 = 30$ arasında gelme ihtimali %68 ~~gelmeyecektir~~ olacaktır. (1. bölge)

~~$\bar{n} + 2\sigma = 48$ $\bar{n} - 2\sigma = 24$ arasına gelme ihtimali~~

~~%95 olacaktır. (2. bölge)~~

$\bar{n} \mp 3\sigma = 36 + 18 = 54$ ile $\bar{n} - 3\sigma = 18$ arasına gelme olasılığı ise %99 olur

Ama (2. bölge) − (1. bölge) arasına gelme olasılığı %27

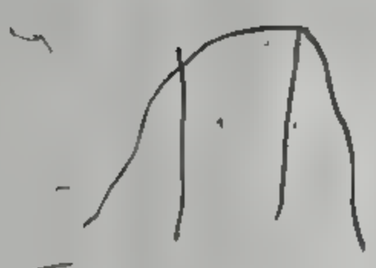
(3. bölge) − ((2. bölge) + (1. bölge)) arasına gelme olasılığı %4 olur.

tv. Seçtiğimiz sayıların frekanslarına bakarak bu fonksiyonun 1. bölge değerleri içindedir

= 28 yat

22 fma

y	I
////	///
////	///
///	///
////	//
///	
///	



$$+ = \frac{41-36}{6}$$

2. kısmda ise 3 $\bar{n} = \frac{1}{2} 360 = 180$

$\sigma = \sqrt{360 \frac{11}{22}} = 9.49$

Bu da %95 ve %68 olasılıklı dağılımların sınırlarını hesapladık.

$P(n) = 0.68$ için $\frac{0.68}{2} = 0.34$ olup $t = 1$

$P(n) = 0.95$ için $\frac{0.95}{2} = 0.475$ olup $t = 1.96$

Alt sınır:

$$1 = \frac{n - 180}{9.49} \quad n = 189$$

Alt sınır

$$-1 = \frac{n - 180}{5.49} \quad n = 170$$

üst $1.96 = \frac{n - 180}{5.49}$ $n = 198$ $\quad -1.96 = \frac{n-180}{5.49}$ $n = 161$

DENEY NO : 7

KEYFİ SAYI ÜRETEÇLERİ

GİRİŞ

İstatistik Fizik parçacık sistemlerinin sonlu sıcaklıklardaki hareketini inceler. Örneğin, noktasal moleküllerden oluşmuş bir ideal gaz içindeki parçacıkların enerjileri dkT/2 ile verilir ve burada d uzayın boyutunu T Kelvin sıcaklığını k=1.6 10^{-16} Joule/Kelvin) ise Boltzmann sabitini tanımlar. N parçacıktan oluşmuş böyle bir sistemde öz ısı dNk/2 ile verilir. Parçacık sayısı N sistemden sisteme değişmekle birlikte Avagadro sayısı ile karşılaştırılabilecek mertebelerdedir. Örneğin bir bardak suda 10^{25} su molekülü bulunur. Moleküllerin üç boyutlu uzayda hareket ettikleri varsayılırsa, her molekül için 3 hız ve 3 koordinat bileşenin her harekette hesaplanması ve moleküllerin diğer moleküller etkileşmelerinin hesaplanabilmesi için de bu değerlerin saklanması gerekecektir. Günümüzde en güçlü bilgisayar olarak piyasada bulunan (Cray-2) bilgisayarının ana belleği 2 Giga byte (250.10^6 sayı) olduğuna göre ancak 10^6 mertebesindeki parçacıktan oluşan bir sistemin bilgisayarla incelenme olasılığı olduğu ortaya çıkar.

İstatistik fizikte, N parçacıktan oluşmuş bir sistemin tüm etkileşmelerinin incelenmesi yerine, olasılık kuramının metodlarını kullanarak yaklaşık çözümler bulmaya yönelik metodlar geliştirilmiştir. Bunların en önemlisi Monte Carlo yöntemidir. Olasılık kuramlarının bilgisayar yolu ile uygulanması ise keyfi sayı üreteçlerine ihtiyaç duyulması sonucunu doğurur. Bilgisayarlarda kullanılan keyfi sayı üreteçleri sıfır ile bir arasında rastgele bir sayı üretebilen matematiksel ifadelerdir. Eğer bu aralıkta tanımlanan tüm reel sayılar aynı şansa sahip iseler ve bir işlem bir p olasılığı ile gerçekleştirilmek isteniyorsa üretilen keyfi sayılardan bu alanda yararlanılabilir. Örneğin eğer istenen olasılık P=0.1 ise ve bir milyon farklı keyfi sayı üretilmişse, bu sayıların %10'unun 0 ile 0.1 arasında olması beklenir. Bu anlamda Bir keyfi sayı üretecinin "iyi" keyfi sayı üreteci olup olmadığı yani istenen aralıktaki tüm reel sayıları eşit olasılıkla verme özelliği test edilmelidir.

Bu çalışmanın amacı; istatistik fizikte yaygın kullanım alanı olan keyfi sayı üreteçlerini,

a) tanımak
b) üreteçlerin testlerinin neler olduğunu anlamaktır.

KEYFI SAYI ÜRETEÇLERI

Doğa olayları keyfi (rastgele) olaylardır. Bunlara örnek radyoaktif bozunma, deney öncesi attığınız zar ile elde ettiğiniz sayılar, yağmurlu bir günde çakan şimşekler arasında geçen zaman alınabilir. Herhangi bir deneyde elde edilen sonuçlar da keyfi sayılardır. Ölçümler ne kadar hassas olursa olsun ölçülen değerler bir ortalama değer etrafında saçılmış keyfi sayılar kümesidir.

Bilgisayarlarda üretilen keyfi sayılar ise ancak "Pseudo Random" olarak adlandırılabilecek yarı keyfi sayılardır. Bunun sebebi bu tür keyfi sayı üreteçleri bir matematiksel formüle dayanır. Aynı ilk değerler aynı sayı grubunu üretirler; buna karşın bir keyfi sayı grubun verildiğinde bu sayılar arasında ilişki görmek imkansızdır.

En yaygın kullanılan keyfi sayı üreteçlerinden iki tanesini daha yakından tanımaya çalışalım.

1) $$IX=(IX*IC+IA),\ MOD\ M \qquad (1)$$

formülü ile verilen "lineer congrinent" tipi keyfi sayı üreteçleridir. Burada IC ve IA seçilen iki sabit tam sayı M ise bilgisayarın tanımlayabileceği en büyük tam sayı olarak alınabilir. IX, üretilen keyfi sayıdır ve bu sayı 0 ile M arasında herhangi bir değer alır. IX sayısını 0 ile 1 aralığına dönüştürebilmek için

$$r=IX/M \qquad (2)$$

işlemi gereklidir.

Bu durumda r sıfır ile bir arasında değişen keyfi sayılardır. En yaygın kullanılan değerler,

$$IC=731,\quad IA=1615,\quad M=2^{31}-1$$

(32 bit bilgisayarlarda yazılabilecek en büyük sayı=2^{31})
Bu üreteç için seçilen keyfi IC, IA ve M değerleri üreteçin *"iyi"* veya *"kötü"* olmasında önemli rol oynar.

2) Diğer bir tür keyfi sayı üreteci sıfır ile bir arasında üretilmiş rastgele iki sayı alınıp bu ikisinin toplamından bulunabilir. r_1 ve r_2 0 ile 1 arasında iki keyfi sayı ise,

$$r_3=r_1+r_2$$
$$r_3=r_3-INT\ (r_3) \qquad (3)$$

gene 0 ile 1 arasında kalan bir keyfi sayıdır.

Bu üretilen keyfi sayıların ne denli keyfi oldukları ve istenen aralığı ne denli iyi taradıkları tartışılabilir bir konudur. Takip eden bölümde keyfi sayı üreteçlerinin iki çok basit testinden bahsedilecektir.

KEYFİ SAYI ÜRETEÇLERİNİN TESTLERİ

A,B aralığında reel sayı üreten keyfi sayı üreteçlerinin ürettikleri sayıların ortalamasının (A+B)/2 ye yakınsaması gerekir. Bu değer üretilen keyfi sayı arttıkça daha büyük yaklaşıklıkla elde edilmelidir. Eğer bu limite yaklaşılmıyorsa bu durumda keyfi sayı üreteci yeterince doğru çalışmıyor demektir. Bu en basit ve temel testtir. Sıfır ile bir arasında keyfi sayı üreten bir keyfi sayı üretecinin ürettiği sayı miktarı arttıkça sayıların ortalaması,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} R_i = 0.5 \qquad (4)$$

olmalıdır.

İkinci ve daha gerçekçi bir test A,B aralığında tüm sayılar eşit olasılıkla seçilip seçilmediğinin testidir. A ve B aralığını N eşit parçaya bölelim. Her bir parçanın uzunluğu dX (=A+B/N) olsun. Her dX küçük aralığına düşen sayı miktarının yaklaşıklıkla birbirlerine eşit olması ve dX aralığı küçüldükçe bu eşit bölüşümün bozulmaması keyfi sayı üretecinin doğru çalışmasının bir ifadesidir. Örnek olarak sıfır ile bir arasında yüz sayı üretildiği ve bu aralığın on eşit parçaya bölündüğü düşünülürse ideal halde,

0 - 0.1 10 sayı
0.1-0.2 10 sayı
.
.
.
0.9-1.0 10 sayı

olmak üzere eşit şekilde bölüşülmelidir. Gerçekte ise bu düzgün dağılıma ancak üretilen keyfi sayı çok büyük sayılara ulaştığında erişilebilir. Deneyde farklı sayılarda üretilen keyfi sayıların bu limite nasıl ulaştığını göreceksiniz.

KEYFİ SAYILARIN İNTEGRAL ALMADA KULLANILMASI

Yoğun madde fiziği, faz geçişlerinin incelenmesi, çok elektronlu atomlar gibi çok serbestlik derecesine sahip yapılarda çok katlı integraller ile karşılaşırız. Bu integraller N parçacıklı bir sistem için 3N katlıdır. Yukarıda bahsi geçen bilim dallarında parçacık sayısı Avagadro sayısı mertebesinde olduğu göz önüne

alınırsa bu integrallerin, ne analitik ve hatta ne de nümerik olarak alınamayacağı açıktır. Bu tür integrallere en bilinen örnek sistemin bölüşüm (partition) fonksiyonudur.

Çok basit bir örnek ile problemi açıklamak istersek, her bir integralin aralığını on eşit parçaya böldüğünüz taktirde 3N serbestlik derecesine sahip bir sistemin bölüşüm fonksiyonunu tanımlayan integralin hesabı için, fonksiyonun 10^{3N} noktada hesaplanması gerekmektedir, bu ise N=20 için 10 Mflopluk bir bilgisayar için 10^{53}sn. yani evrenin yaşının 10^{34} katı zaman demektir. Bu tarz çok serbestlik derecesine sahip sistemlerin incelenmesinde düzgün tarama yöntemi ile örnekleme yerine keyfi tarama yöntemi ile örnekleme yapılması zorunludur.

Keyfi tarama yolu ile integral almayı bir örnek ile açıklayalım.Bir f(x) fonksiyonun a ile b arasında integralinin nasıl alınabileceğini tartışalım.
İntegralin tanımından,

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\,\Delta x_i \qquad (5)$$

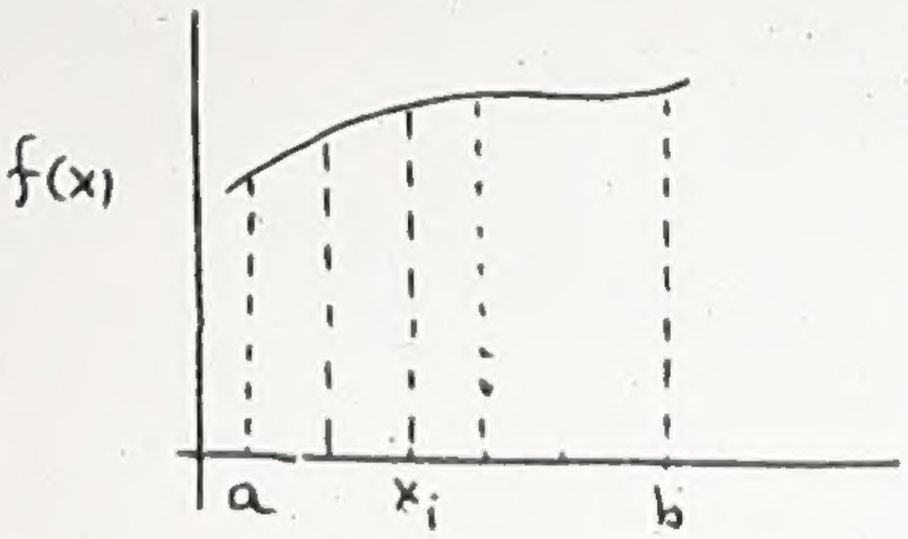
Eğer a ile b aralığını N eşit parçaya bölersek, bu kesikli uzayda herhangi bir koordinat $X_i = a + i*DX$ ile verilir. Bu noktalar birbirlerinden eşit uzaklıktadırlar.

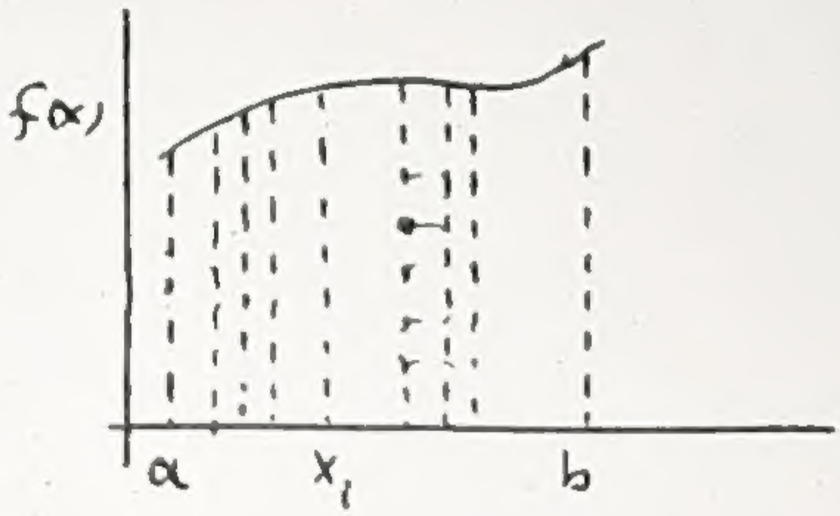
$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \Delta x \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \qquad (6)$$

Bu anda problemi başka bir yol ile çözmeğe çalışalım. a ile b arasında eşit aralıklı olmayan N nokta tanımlayalım ve tekrar aynı integral ifademizi yazalım. burada dX sabit bir sayı değil ve her aralık için değişen bir değere sahiptir. Ortalama olarak

$$\Delta x = \frac{a+b}{N}$$

alınabilir.





Yukarıdaki şekillerde görüleceği gibi bu durumda olanlar eşit değil ve integral gerçek değere ancak alanların daralarak çok artması sonucu yaklaşabilecektir. a ile b arasında düzgün dağılım veren bir keyfi sayıüreteci eğer iyi bir üreteç ise aynı olasılıkların her sayıyı vereceğinden, üretilen sayı, N büyüdükçe integral gerçek değerine yaklaşır.

Öngörüler yolu ile belli iki sayı arasında kalan rastgele sayılar üretilerek yaklaşıklıkla yukarıdaki integralin alınabileceğini gördük. Matematiksel olarak, "Central-limit" teoremi ise herhangi bir integral I, P(x) olasılık dağılımı ile fonksiyonun N örneklenmesi sonucu belli hata limitleri ile

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i) + \Delta I \qquad (7)$$

formülü ile verilebileceğini ispatlar. Burada hata, ΔI,

$$\Delta I = \frac{1}{\sqrt{N-1}}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f^2(x_i) - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\right)^2\right)^{1/2} \qquad (8)$$

standart hatadır.

Xi ler 3N boyutlu uzaydaki noktaları tanımlayan keyfi koordinatlardır. (7) ve (8) formüllerinin önemi, integralin kaç boyutlu uzayda olursa olsun yaklaşık sonucun olacağı ve hatasının alınan nokta sayısının karekökü ile orantılı olarak azalacağıdır.

Bu tarz integrallerin keyfi sayılar yolu ile alınmasında bir önemli özellik de istenen dağalımda keyfi sayıların alınabilmesidir.

SORULAR

1. IX=1237, IC=417, IA=117, M=4717 değerlerini alarak (1) ve (2) formüllerini kullanarak 0 ile 1 arasında beş birbirini takip eden keyfi sayıyı üretiniz.
2. r_1=0.03579, r_2=0.8421, r_3=0.57219, r_4=0.25139, r_5=0.38215 r_6=0.72185, r_7=0.1132 sayılarını ve $r_{n+7}=r_{n+6}+r_n$ formülünü kullanarak beş adet keyfi sayı üretiniz.
3. Üç zar yardımı ile elde ettiğiniz sayıların başlarına "0." koyarak (örnek: elinizdeki sayı 417 ise elde edeceğiniz sayı 0.417 olacaktır.) elde edeceğiniz 0 ile 1 arasında dağılmış keyfi sayıların düzgün dağılımlı olup olmadıklarını tartışınız
4. Yukarıdaki yöntemle elde etmiş olduğunuz keyfi sayıları kullanarak $FX=3.0\ X^2$ fonksiyonunun intégralini "Central Limit Teoremi" (7 nolu denklem) yardımı ile hesaplayınız.